Dossier 25 : feuillets 186–194 (195–232 en blanc)

25

185

Cahier où quelques pages sont de Galois

(M) p. 36

186.

notes de

mathématiques.

trouver les valeurs de $x^n \lg x$ pour $x=0$

posons $\lg x = -\frac{1}{z}$ $\quad x = e^{-\frac{1}{z}}$ et $x^n \lg x = -\frac{1}{z}\, e^{-\frac{n}{z}}$ 187 développement

alors $x^n \lg x = -e^{-\frac{n}{z}} \cdot \frac{1}{z} = -\frac{1}{z} \times \frac{1}{e^{\frac{n}{z}}} = \frac{1}{z}\left\{\frac{1}{1+\frac{n}{z}+\dots}\right\}$

$= -\frac{1}{z+n+\dots}$ $\quad$ pour $z = \infty$ devient zéro

---

on ne peut pas développer $\frac{x-1}{lx}$ par les [illegible] de [illegible] puisque tous les dérivés deviennent zéro [illegible] [illegible] dans ce cas les termes de [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] cependant [illegible] on [illegible] [illegible] (voir calcul différentiel [illegible]) ——

---

on $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$

$\frac{x}{1+x} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \dots$ donc

$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \dots$

retranchant il vient

$\dots\dots x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} \dots$

Donc en intégrant $\frac{1}{x}$ il vient

$lx + c = \frac{x - x^{-1}}{1} - \frac{x^2 - x^{-2}}{2} + \frac{x^3 - x^{-3}}{3} - \dots$

si l'on fait $x=1$ on trouve $c=0$.

on aura donc $e^{2z\sqrt{-1}} + e^{-2z\sqrt{-1}} = 2\cos 2z$ (1)

soient $e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}} = y + \frac{1}{y}$ [illegible] (1)

z par $2z$, $3z$ etc. dans la formule (1)

$2\cos z = y + \frac{1}{y}$ $\quad 2\cos 2z = y^2 + \frac{1}{y^2}$, $\quad 2\cos 3z = y^3 + \frac{1}{y^3}$ (3)

$2\cos nz = y^n + \frac{1}{y^n}$

développement ~~$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 -$~~

$\frac{1}{1+y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} - \cdots$

$\frac{y}{1+y} = y - y^2 + y^3 - y^4 \cdots$

ajoutant il vient $1 = \left(y + \frac{1}{y}\right) - \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + \cdots$

posant $y + \frac{1}{y} = 2\cos z$ il vient

$1 = 2\cos z - 2\cos 2z + 2\cos 3z - \cdots$

intégrant il vient

$\frac{z}{2} + c = \sin z - \frac{\sin 2z}{2} + \frac{\sin 3z}{3}$ qui est la formule

[illegible]

[illegible]

on a $\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \right) = 2\frac{d f(x)}{dx}$

[illegible] $\left(\frac{\frac{1}{2} f(x+h) - \frac{1}{2} f(x-h)}{h} \right) = \frac{d f(x)}{dx}$

[illegible]

$f(x) = \sin x$ $\quad \frac{1}{2}\sin(x+h) - \frac{1}{2}\sin(x-h) = \frac{\sin h \cos x}{h}$

et $\left(- \qquad \right) = \frac{d \sin x}{dx} = \cos x$

---

on aura aussi

$\pi = [illegible] + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots$)

---

on aura donc [illegible]

$\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots$

et $\frac{1}{2}(\pi - x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x$

ajoutant il vient

$\frac{1}{4}\pi = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x$

Je suppose que l'équation de la courbe ait [de] degré m. Soient $\varphi(x, y)$ l'ensemble des termes de degré m, $\psi(x,y)$ de ceux du degré $m-1$, en sorte que cette équation soit de la forme

$$\varphi(x, y) + \psi(x, y) + \ldots = 0$$

Pour savoir ce que devient $\frac{y}{x}$ quand x est infini, je divise tout par x^m; il vient

$$\varphi\left(1, \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}\psi\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots = 0$$

ce qui se réduit simplement [quand $x = \infty$], à

$\varphi\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0$ ou plus élégamment $\varphi(x, y) = 0$

L'équation $\varphi(x, y) = 0$ donne le rapport de y à x quand on passe à l'infini.

Cela posé, soit $\Phi(x, y) + \Psi(x, y) + \ldots = 0$, l'équation d'une autre courbe.

Pour que ces deux courbes soient asymptotes l'une à l'autre il faudra que les équations $\varphi(x, y) = 0$, $\Phi(x, y) = 0$ aient un facteur commun tel que $(y - cx)^n$.

Mais cela ne suffit pas, il faudra de plus que dans les deux courbes, la valeur de $(y - cx)^n$ soit la même à l'infini.

Soient donc

$$\phi(x,y) = (y-cx)^n \times q \qquad \Phi(x,y) = (y-cx)^n \times Q$$

on aura en substituant dans les équations respectives des ~~courbes~~ et divisant ~~toute~~ par q et par Q

$$(y-cx)^n + \frac{\psi(x,y)}{q} + \dots = 0, \qquad (y-cx)^n + \frac{\Psi(x,y)}{Q} + \dots = 0$$

et passant à l'infini il reste

$$(y-cx)^n = -\frac{\psi(x,y)}{q} \qquad (y-cx)^n = -\frac{\Psi(x,y)}{Q}$$

d'où l'on a pour la seconde condition

$$\frac{\psi(x,y)}{q} = \frac{\Psi(x,y)}{Q}$$

qui doit avoir lieu à l'infini c'est à dire quand $y=cx$. Il reste à exprimer q et Q quand $y=cx$. Or on a

$$q = \frac{\phi(x,y)}{(y-cx)^n} \qquad Q = \frac{\Phi(x,y)}{(y-cx)^n}$$

si l'on fait $y=cx$ dans ces formules, il vient $\frac{0}{0}$. Différenciant donc les termes par rapport à y, il viendra

$$q = \frac{d^n\phi}{dy^n} \times \frac{1}{1.2.3\dots n}, \qquad Q = \frac{d^n\Phi}{dy^n} \times \frac{1}{1.2.3\dots n}$$

valeurs qui substituées dans l'équation de condition donne

$$\frac{\psi(x,y)}{\left(\frac{d^n\phi}{dy^n}\right)} = \frac{\Psi(x,y)}{\left(\frac{d^n\Phi}{dy^n}\right)}$$

qui et cette équation doit être satisfaite par $y=cx$.

l'une des courbes devenait une ligne droite, par exemple que l'on eût

$$\Phi(x,y) = y-cx \qquad \Psi(x,y) = -b$$

et la seconde condition se réduirait à

$$\frac{\psi(x,y)}{\frac{d\phi}{dy}} = -b$$

d'où ce théorème : les ~~courbes~~ asymptotes d'une courbe ne dépendent que des termes du $m^{ième}$ et du $m-1^{ème}$ degré de son équation.

De ce théorème on peut tirer une nouvelle méthode pour déterminer les asymptotes dans certains cas. Soit ~~toujours~~ l'équation $\phi(x,y) + \psi(x,y) + \dots = 0$. Si conservant les termes $\phi(x,y) + \psi(x,y)$, on dispose des autres termes en sorte de rendre l'équation résoluble en facteurs du premier degré, on n'aura plus à chercher que les asymptotes d'une ligne dont l'équation se décompose en facteurs. Ces facteurs seront donc eux-mêmes les équations des diverses asymptotes, parmi lesquelles il pourra y en avoir d'imaginaires.

trouver les valeurs de $\frac{dx}{d[illegible]}$ qui rendent $\frac{[illegible]}{[illegible]}$ pour $n=0$

[illegible] $\frac{[illegible]}{[illegible]}$

Les auteurs qui ont envisagé immédiatement le calcul différentiel comme la science des limites du rapport des accroissements de deux variables dépendantes, ont démontré rigoureusement, à l'aide de considérations abstraites, que le rapport $\frac{f(X)-f(x)}{X-x}$ ne pouvait être en général nul ou infini quand $X=x$. On parvient ainsi à asseoir les principes du calcul différentiel, mais sans faire voir où l'on est mené par ces considérations. Je crois ~~[illegible]~~ plus direct ~~et plus simple~~ de considérer ~~le calcul~~ ensuite le développement des fonctions et de poser la formule de Taylor comme la base de l'Analyse infinitésimale. Cette marche a été suivie par Lagrange (Calcul des Fonctions) et on lui a donné aucune rigueur. Il suppose d'abord gratuitement que $f(x+h)$ a nécessairement un développement suivant les puissances de h ; puis, pour prouver que ce développement ne peut contenir de puissances fractionnaires ou négatives, il fait un raisonnement qui tombe de lui-même, si l'on suppose une infinité de termes affectés de pareilles puissances. Je vais tâcher de suivre la même marche en évitant les mêmes inconvénients.

1. Considérons d'abord une fonction $\varphi(z)$ qui devienne nulle pour la valeur 0 de la variable. Je dis que l'on pourra toujours déterminer un nombre positif fini n de manière que $\frac{\varphi(z)}{z^n}$ ne soit ni nulle ni infinie, à moins que $\frac{\varphi(z)}{z^n}$ ne soit nulle quand $z=0$ pour toute valeur finie de n.

Car si $\frac{\varphi(z)}{z^n}$ n'est pas nul quand $z=0$ pour toute valeur finie de n, soit m une valeur telle que $\frac{\varphi(z)}{z^m}$ ne soit pas nul quand $z=0$. Si $\frac{\varphi(z)}{z^m}$ acquiert alors une valeur finie, la proposition est démontrée ; si non $\frac{\varphi(z)}{z^m}$ étant infini et φz nul pour $z=0$, en faisant croître n depuis $n=0$ jusqu'à $n=m$, les valeurs de $\frac{\varphi z}{z^n}$ pour $z=0$ devront être infinies à partir d'une certaine limite. Soit p cette limite : $\frac{\varphi(z)}{z^p}$ ne sera pas infini pour $z=0$ mais $\frac{\varphi(z)}{z^{p+u}}$ le sera, quelque petite que soit la quantité positive u. Donc $\frac{\varphi(z)}{z^p}$ ne saurait être nul pour $z=0$. La proposition est donc démontrée.

2. Cela posé, soit une fonction $\varphi(z)$ qui ne devienne point infinie pour une valeur nulle de la variable. On aura en désignant $\varphi(0)$ par A, $\varphi(z)-A$ nul pour $z=0$ et par conséquent on pourra trouver pour le nombre n une valeur telle que $\frac{\varphi(z)-A}{z^n}$ ne soit ni nulle ni infinie quand $z=0$, à moins que cette fonction ne soit nulle pour $z=0$, quelque soit n. On aura donc

$$\varphi(z) = A + z^n \varphi_1(z)$$

$\varphi_1(z)$ représentant une fonction qui ne devient ni nulle ni infinie quand $z=0$. Si l'on opère sur $\varphi_1(z)$ comme sur $\varphi(z)$ on aura

$$\varphi(z) = A + Bz^n + z^m \varphi_2 z$$

m étant $> n$ et $\varphi_2 z$ ne devenant ni nul ni infini quand $z=0$. Continuant ainsi on aura

$$\varphi(z) = A + Bz^n + Cz^m + \dots + Pz^p + z^k \psi(z)$$

l'exposant k étant aussi grand que l'on voudra, et la fonction $\psi(z)$ ne devenant pas infinie pour $z=0$. On réduit ainsi la considération d'une fonction $\varphi(z)$ à celle d'une fonction qui se trouve multipliée par une très grande puissance de la variable, c'est ce que j'appelle développer la fonction $\varphi(x)$. D'après ce qui précède il est clair qu'un tel développement correspondant à ~~une fonction donnée qui ne deviendrait ni nul ni infini quand x = 0~~ ~~[illegible] telle que $\frac{f(x)}{x^n}$ soit nul pour x = 0, quelque soit n, alors on pourrait dire que cette ne admet pas de développement, puisqu'elle est multipliée par une puissance infinie de x~~

3. Maintenant soit f une fonction quelconque. La fonction $f(x+h)$ n'étant pas infinie pour $h=0$ quand on ne donne pas de valeur particulière à x, il suit de ce que nous avons dit, qu'on pourra développer $f(x+h)$ sous cette forme

$$f(x+h) = A + Bh^a + Ch^m + \dots + h^k \varphi(x, h)$$

Les lettres A, B, C, ... représentant des fonctions de x, l'exposant K étant aussi grand que l'on voudra, et $\varphi(x, h)$ étant une fonction qui ne deviendra pas infinie pour $h=0$. C'est dans la recherche des coëfficients A, B, C, ... que consiste le calcul différentiel. Les coëfficients sont nécessairement déterminés, ainsi que les exposants n, m, ... puisque (n° 2) il n'y a qu'une seule manière de développer $f(x+h)$.

4. Occupons-nous donc de cette recherche dans le cas le plus simple qui est celui où $f(x+h) = (x+h)^m$; et posons

$$(1) \quad (x+h)^m = x^m + h^k \varphi(x, h).$$

$\varphi(x, h)$ ne devenant ni nul ni infini pour $h=0$.

Il s'agit d'abord de déterminer l'exposant K. Or on déduit de (1) la formule (quand n est entier)

$$(x+h)^{mn} = x^{mn} + h^k \psi(x, h)$$

$\psi(x, h)$ ne devenant ni nul ni infini pour $x=0$.

On en déduit par suite

$$(2) \quad (x+h)^{mn} = x^{mn} + h^k \psi(x, h)$$

n étant quelconque.

Soit $m=1$. On a

$$(x+h)^m = x^m + h$$

Donc ici $K=1$. Donc quelque soit m, $K=1$.

On aura donc simplement

$$(x+h)^m = x^m + h\,\varphi(x, h)$$

$\varphi(x, h)$ ne devenant ni nul ni infini pour $h=0$.

On en déduit

$$(1+h)^m = 1 + h\,\varphi(1, h)$$

ou bien $\left(1+\frac{h}{x}\right)^m = 1 + \frac{h}{x}\varphi\left(1, \frac{h}{x}\right)$ ou bien

$$(x+h)^m = x^m + h\,x^{m-1}\varphi\left(1, \frac{h}{x}\right)$$

Ainsi le second terme du développement de $(x+h)^m$ est de la forme $a\,x^{m-1}h$.

On démontrera facilement que $a = m$ et que l'on a par conséquent

$$(x+h) = x^m + h\{m x^{m-1} + X(x, h)\}$$

$\chi(x, h)$ devenant nul pour $h=0$.

5. Cela posé, reprenons le developpement

$$f(x+h) = f(x) + Ah^n + Bh^m + \dots + h^k \varphi(x, h)$$

et cherchons le terme affecté de la plus petite puissance de h dans le developpement de $f(x+h)$, &c. on aura la formule de Taylor,

$$f(x+h) = f(x) + f'(x).h + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{1.2.3\dots n}h^n + h^{n+1}\varphi(x, h)$$

$\varphi(x, h)$ ne devenant ni nul ni infini pour $h=0$

6. Cette formule une fois demontrée, on n'aura plus aucun doute à craindre dans la recherche des coëfficients différentiels, et l'on pourra suivre telle marche qu'on voudra pour les determiner. Mais ~~tout~~ on pourra éviter beaucoup de longueurs en s'appuyant sur cette formule même.

Par exemple, si l'on demande la dérivée de a^x; a étant un nombre quelconque, on aura

$$a^{x+h} = a^x + h \times a^x \frac{a^h - 1}{h}$$

Mais on doit avoir

$$a^{x+h} = a^x + h\,\varphi(x, h)$$

$\varphi(x, h)$ ne devenant pas ni ~~nul~~ nul ni infini pour $h=0$. Donc la quantité $\frac{a^h-1}{h}$ n'est ni nulle ni infinie pour $h=0$.

Designons la par c, on aura

$$\frac{d.a^x}{dx} = ca^x \quad \text{d'où} \quad \frac{d.a^{\frac{x}{c}}}{dx} = a^{\frac{x}{c}}$$

faisant $a^{\frac{1}{c}} = e$ on aura

$$\frac{d.e^x}{dx} = e^x$$

et l'on est sûr que e est une quantité finie. Au moyen de la relation $\frac{d.e^x}{dx} = e^x$, on trouvera le developpement de e^{x+h} et enfin la valeur de e.

Appelant l les logarithmes dont la base est e on aura à cause de $a^{\frac{1}{c}} = e$,

$$la = c$$

De la même manière si l'on cherchait la dérivée de lx on trouverait

$$l(x+h) = lx + \frac{1}{x}.\frac{x}{h}\,l\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

Par conséquent $\frac{x}{h}\,l\left(1+\frac{h}{x}\right)$ est une quantité finie quand $h=0$. De plus elle est évidemment indépendante ~~[illegible]~~ de x quand $h=0$. On a donc

$$\frac{d.lx}{dx} = \frac{C}{x}$$

C étant une constante

On en deduit

$$\frac{d\frac{lx}{C}}{dx} = \frac{1}{x}$$

D'où, &c.

Si l'on pose $a = f(A)$ $\quad b = f(B)$, on aura

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_A^B \varphi[f(x)]\,f'(x)\,dx$$

~~soit $f(x)$~~

Soit en particulier $f(x) = \dfrac{a+bx}{1+x}$, on aura $A=0$, $B=\infty$

d'où
$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_0^\infty \varphi\left(\frac{a+bx}{1+x}\right) \frac{b-a}{(1+x)^2}\,dx$$

Soit encore $f(x) = \dfrac{Ab-Ba}{b-a} + \dfrac{B-A}{b-a}x$ on trouvera

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_A^B \varphi\left\{\frac{Ab-Ba}{b-a} + \frac{B-A}{b-a}x\right\} \frac{B-A}{b-a}\,dx$$

Formule très simple qui sert à rapporter l'intégrale à des limites données, quand ces limites sont finies.

1° On a pour $n = \infty$

$$\operatorname{Lim}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \operatorname{Lim}\left(1+\frac{x}{nx}\right)^{nx} = \left\{\operatorname{Lim}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^x = e^x$$

2° On a

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = \left(\cos\frac{x}{n} + \sin\frac{x}{n}\sqrt{-1}\right)^n = \cos^n\frac{x}{n}\cdot\left(1 + \frac{\tang\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\cdot\frac{x\sqrt{-1}}{n}\right)^n$$

Cette équation, vraie pour toute valeur de n, l'est à la limite: ~~or on a~~

$$\operatorname{Lim}\left(\cos^n\frac{x}{n}\right)=1 \qquad \operatorname{Lim}\left(\frac{\tang\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)=1$$

Donc
$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = \operatorname{Lim}\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{n}\right)^n = e^{x\sqrt{-1}}$$

On peut rattacher la théorie des logarithmes népériens aux considérations de l'arithmétique élémentaire.

En effet, on sait qu'un franc ~~[illegible]~~ placé à l'intérêt de α pour 1 fr. dans un an, augmente différemment suivant que les intervalles par rapport auxquels on prend les intérêts des intérêts ~~[illegible]~~ sont plus ou moins rapprochés.

Par exemple si on prenait les intérêts de mois en mois, le franc au bout d'un an vaudrait

$$\left(1+\frac{\alpha}{12}\right)^{12} \text{ franc}$$

Si on les prenait de jour en jour, le franc au bout d'un an vaudrait

$$\left(1+\frac{\alpha}{365}\right)^{365} \text{ francs}$$

Or il est curieux de voir quelle est la limite que l'on ne peut dépasser, à quelque peu de distance qu'on prenne les intérêts. D'après ce qui précède, cette limite sera $e^\alpha = \operatorname{Lim}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$

déterminer le centre de gravité d'une sphère en supposant que son volume varie proportionnellement [illegible] pour une demi sphère $\frac{4}{15}R$ est à la densité [illegible] la densité d'un [illegible] quelconque parallèle

est alors $s = a\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}$ [illegible] $\int$ [illegible] $= \int \frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}$ etc.

dans la cycloïde [illegible] que [illegible]

[illegible] $= 2\sqrt{R}\sqrt{2R-y}$ [illegible]

[illegible] $2R-s = 2\sqrt{R}\sqrt{2R-y}$

= [illegible] utile. [illegible] cycloïde

$x = \omega - \sin\omega$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\omega}{1-\cos\omega}$ [illegible]

$y = 1-\cos\omega$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

---

la méthode [illegible]

~~[illegible]~~ [illegible]

~~[illegible]~~ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

---

en cherchant un arc d'ellipse on arrive à

$s = \int_0^x \sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] $y = \frac{1}{2}(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})$ [illegible]

les calculs.

~~[illegible]~~ [illegible]

[illegible] étant quelconque

[illegible] $= u\,dx$

[illegible]

Dans [illegible] on [illegible] on a [illegible]

$\int \frac{[illegible]}{1 + [illegible]}$ on [illegible] = [illegible] [illegible]

[illegible] $\int \frac{x^n dx}{1 + x^2}$ on [illegible] $\frac{x^n}{1+x^2}$ [illegible]

une fonction algébrique dont le numérateur

est plus grand que le dénominateur [illegible]

$x = \frac{1}{1+x^2}$ [illegible] x [illegible].

LES FOLIOS 195 A 230 SONT VIERGES

garance

ammoniaque et garance (2)

on a mis de la garance dans de l'ammoniaque liquide on l'a laissé un jour on a obtenu une liqueur d'un rouge foncé de vin.

Dossier 26 : feuillets 233 – 251

26

232 bis

Manuscrits de Galois

provenant de M. Hermite

(donnés à Hermite par M. Richard)

— Donné par M. Emile Picard

(M) p. 63

Quelle place l'arithmétique doit elle occuper dans l'analyse?
C'est une question plus difficile à résoudre qu'on ne pense:
Un auteur m'a dit: "l'arithmétique est la base de toutes les
parties des Mathématiques, puisque c'est toujours aux nombres
qu'il faut ramener les résultats du calcul". D'après la der-
nière phrase de l'auteur, il serait plus naturel de croire que l'a-
rithmétique est le terme et le complément de l'analyse; et c'est
ce qui a lieu. Voyons pour cela comme on procède dans
tous les livres d'arithmétique, rejetons-y des notions d'analyse
générale; ou, si l'on veut, d'arithmétique universelle, en
précédant pas partout les règles de l'arithmétique propre-
ment dite, qui rompent à chaque pas le fil des géné-
ralités. Avouons toutefois que ce mal est nécessaire, et
qu'il serait dangereux de partir de toutes ces idées générales
que nous avons tous sur les nombres, à des idées plus
abstraites encore. L'esprit est capable de conceptions Méta-
physiques, mais il ne peut les suivre longtemps.
Le travail que nous allons faire n'est donc qu'une simple
spéculation, et l'ordre que nous allons indiquer ne peut
être aucunement suivi.

Définitions des quantités, unités, nombres abstraits, nombres
concrets. Toutes ces définitions se trouvent dans les livres
d'arithmétique, et appartiennent autant à l'algèbre qu'à
cette science. Il en est de même de ce qui suit:
Définitions de l'addition, de la multiplication, de l'élévation
aux puissances, de la soustraction, de la division, de l'extraction
des racines. Toutes ces opérations peuvent se faire sans règles,
mais d'une manière très longue; il est plus simple d'en former
qui ne fassent des additions [illegible] multiplications, sans savoir
écrire les nombres [illegible] arithmétique ne peuvent ensuite
qu'abréger les opérations.
Ces éléments du calcul une fois connus, l'arithmétique
universelle a ses vérités et ses problèmes, indépendamment

d'aucune ~~[illegible]~~

Après les quatre règles, on a coutume de dire quelque chose de la divisibilité des nombres, et tout le monde sait que les propriétés générales des nombres sont indépendantes du système de numération. Les plus élémentaires sont celles qui suivent :

Quand plusieurs nombres ont un diviseur commun, leur somme a le même diviseur.

Tout diviseur d'un nombre divise les multiples de ce nombre.

La différence de deux nombres est divisible par tout diviseur commun à ces deux nombres.

Le plus grand commun diviseur entre deux nombres est le même que entre le plus petit et le reste de la division du plus grand par le plus petit.

Et ainsi du reste [illegible]

~~[illegible]~~ les fractions

Définition des fractions — Propriété générale des fractions : on peut multiplier par un même nombre le numérateur et le dénominateur sans changer la valeur de la fraction. — Réduire plusieurs fractions au même dénominateur. — Addition et soustraction des fractions.

— Multiplication, division, élévation aux puissances, extraction de racines des fractions.

— Rapports, proportions, progressions. Tout cela est [illegible] : rien de plus simple et [illegible] de plus général.

— Logarithmes. Ici je crois devoir m'étendre un peu plus qu'on n'a fait sur le sujet. Après avoir exposé les propriétés des logarithmes dans une base quelconque, voici comme on pourrait apprendre à les calculer. Soient les deux progressions

$$1,\ r,\ r^2,\ r^3,\ \ldots\ldots \quad (1)$$
$$0,\ c(r-1),\ 2c(r-1),\ 3c(r-1),\ \ldots\ldots \quad (2)$$

(On peut toujours supposer cette forme au système, en faisant c égal à la différence de la seconde progression divisée par $r-1$)

Je dis que la suite (2)

$$0,\ c(r-1),\ 2c(r-1),\ 3c(r-1),\ 4c(r-1),\ \ldots \quad (2)$$

aura ses termes compris entre ceux des deux suites

$$0,\ c(r-1),\ c(r^2-1),\ c(r^3-1),\ c(r^4-1),\ \ldots \quad (3)$$
$$0,\ \frac{c(r-1)}{r},\ \frac{c(r^2-1)}{r^2},\ \frac{c(r^3-1)}{r^3},\ \frac{c(r^4-1)}{r^4},\ \ldots \quad (4)$$

Comme toutes ces suites ont les premiers termes communs, il suffit de démontrer que la série (3) croît plus rapidement, et la série (4) moins rapidement que la série (2). Ce qu'il est aisé de voir en prenant les différences correspondantes de deux termes consécutifs quelconques dans les trois séries.

Donc, en général, les termes de la série (2) seront compris entre les termes correspondants des séries (3) et (4). Mais les termes de la série (2) sont les logarithmes de ceux de la série (1), donc on aura en général, $\log x$ compris entre $c(x-1)$ et $c\frac{x-1}{x}$, c étant une quantité constante.

~~[illegible]~~ Maintenant pour calculer les logarithmes l'on observera que $n \log \sqrt[n]{x} = \log x$, et qu'ainsi $\log x$ est compris entre $cn(\sqrt[n]{x}-1)$ et $c\frac{n(\sqrt[n]{x}-1)}{\sqrt[n]{x}}$, et à cause que l'on pourra prendre n aussi grand que l'on voudra, ces limites pourront se rapprocher aussi tant que l'on voudra.

Ceci nous apprend que les logarithmes d'un système ne diffèrent de ceux d'un autre que par le coefficient c qui les multiplie.

Désignons simplement par lx les logarithmes de x dans le système où $c=1$. On peut calculer tous ces logarithmes par la règle ci-dessus.

Cela posé supposons qu'on veuille calculer $\log x$ dans la base b. On aura $\log x = c\,lx$, d'où faisant $x = b$, log b ou $1 = c\, lb$. D'où $c = \frac{1}{lb}$.

Ainsi quand on aura calculé tous les logarithmes dans le système $(c = 1)$, il suffira, pour avoir les logarithmes dont la base est b, de multiplier les logarithmes déjà obtenus par $\frac{1}{lb}$.

Peut-être serait-il à souhaiter qu'on transportât ainsi dans les éléments la considération des logarithmes naturels. Au reste, cette théorie convenait naturellement au sujet que nous traitons; où nous devions faire abstraction de la base particulière du système de logarithmes.

— Voilà les propositions les plus simples qui servent de base à l'arithmétique élémentaire. Elles sont toutes, comme l'on voit, fort générales, et n'ont besoin d'aucun avis. Après cette récapitulation, on ne peut douter de ce que nous avons avancé.

— Voyons maintenant ce qui appartient à l'arithmétique proprement dite. Cette branche est fort peu de chose, ainsi qu'on va le voir. Mais ce peu de chose est si essentiel à toutes les branches de la science, qu'on peut en effet la regarder comme complétant toutes les Mathématiques.

— Système de numération. — Sans ce secours, point d'espoir de pouvoir compter des nombres un peu considérables. En aucun ne pourrait retenir autant de mots qu'il y a de nombres.

— Opérations de l'addition, multiplication, élévation aux puissances, soustraction, division, extraction de racines.

— Tout cela est indispensable dans la pratique. Quelle division un peu compliquée pourrait-on faire sur les doigts ?

— Choix de la base du système de logarithmes : la même que celle du système de numération. Usage des tables de logarithmes. — On sait assez l'importance de ce choix. Ces merveilleuses fonctions ne sont pas moins utiles dans la pratique que curieuses en théorie.

(3)

— Toutes les parties de l'arithmétique dont je viens de parler, ne sont que la mise en pratique des propositions de l'arithmétique universelle. On voit de suite quelles modifications il faut apporter aux règles du système décimal, quand la base est quelconque.

Mais il est des propositions qu'on ne pourrait présenter dans l'arithmétique universelle, et auxquelles le mode de numération peut seul donner lieu.

— Théorème. Soit b la base d'un système de numération. Soit m un diviseur de b^n-1. Pour reconnaître si un nombre donné est divisible par m, il faut partager le nombre donné en tranches de n chiffres à partir de la droite, ajouter l'une à l'autre toutes ces tranches de n chiffres, et le reste de la division de ce nouveau nombre par m sera le même que le reste de la division du nombre proposé par m diviseur de b^n-1.

— Le nombre donné peut se mettre sous la forme

$$\cdots + s\cdot b^{3n} + r\cdot b^{2n} + q\cdot b^n + p$$

s, r, q, p, étant les tranches de n chiffres.

Cette forme revient à

$$\cdots + s(b^{3n}-1) + r(b^{2n}-1) + q(b^n-1)$$
$$\cdots + s + r + q + p$$

Toute la première ligne est divisible par b^n-1 et partant par m. Donc, &c.

— Corollaire. Soit $m = b-1$, on aura $n = 1$, et il suffira de faire la somme des chiffres. Il en serait de même si m était un diviseur de $b-1$.

— La règle générale se simplifie quand $m = b+1$ ou un diviseur de ce nombre. D'après cette règle, on aurait $n = 2$, et il faudrait faire la somme des tranches de deux chiffres. Mais au lieu d'une tranche de deux chiffres on peut prendre le premier chiffre de cette tranche moins le second, à cause de $tb+u = t(b+1) + u - t$.

— Après ce théorème, viennent les décimales, fractions dont les dénominateurs sont des puissances de la base. Toute fraction dont le dénominateur ne contient d'autres facteurs que ceux de la base, peut se réduire en fraction finie de cette espèce.

— Soit au contraire la fraction $\frac{k}{m}$, m ayant d'autres facteurs premiers que la base. il existera nécessairement un nombre $b^p(b^n-1)$ qui sera divisible par m, n étant [illegible] que le plus grand diviseur de m premier avec b, et p étant égal au nombre entier immédiatement plus grand que la plus grande des fractions $\frac{\alpha'}{\alpha}, \frac{\beta'}{\beta}, \frac{\gamma'}{\gamma}, \ldots$ (en désignant la base par $A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} \ldots$, A, B, C étant premiers, et $A^{\alpha'}, B^{\beta'}, C^{\gamma'}, \ldots$, les facteurs de m communs avec b)

— Donc la fraction $\frac{k}{m}$ prendra la forme $\frac{k'}{b^p(b^n-1)}$, ou

$$\frac{k'}{b^p b^n} + \frac{k'}{b^p b^{2n}} + \frac{k'}{b^p b^{3n}} + \ldots$$

fraction qui sera périodique après un nombre p de chiffres. La réciproque est vraie.

— Toutes ces propositions tiennent à la théorie des nombres et ne peuvent être données qu'imparfaitement dans l'arithmétique. La propriété suivante se démontre aisément par le fameux théorème de Fermat.

— Si m est premier, le nombre des chiffres de la période divise exactement m-1.

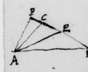
Théorème. Deux cônes droits sont équivalents quand la surface convexe de l'un est équivalente à la base de l'autre et que la perpendiculaire menée du centre de la base du premier sur le côté est égale à la hauteur du second.

Plus généralement: le solide décrit par ABC sur AB est équivalent au solide décrit par A'B'C' sur A'B', si la surface du cône décrite par CB est égale à la surface du cercle décrite par C'D', et que AP = A'B'.

— Pour cela il suffit de démontrer que le ~~triangle~~ solide décrit par ACB a pour mesure, la surface du cône décrit par CB, multipliée par le tiers de la hauteur AP.

En effet les triangles semblables APB, CDB, donnent $AB \times CD = AP \times CB$, d'où $\frac{1}{3}\pi\, AB \times \overline{CD}^2 = \frac{1}{3}\pi\, AP \times CD \times CB$. Mais $\pi \times CD \times CD$ = la surface décrite par CB. Donc la solidité du volume décrit par ACB, est égale à $\frac{1}{3}$ AP multiplié par la surface décrite par CB.

Scholie. Au moyen de la proposition que nous venons de démontrer, pour la solidité décrite par ACB, on pourrait arriver plus simplement à la solidité décrite par le triangle ACE extérieur à AB.



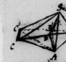
Car les deux triangles ABC, ABE, engendrant des volumes égaux respectivement à $\frac{1}{3}$ AP ~~multipliant~~ surf. CB, et surf. EB, la différence des volumes sera égale à $\frac{1}{3}$ AP multipliant la différence des surfaces: c'est à dire que le volume engendré par le triangle ACE, sera égal à $\frac{1}{3}$ AP, multipliant la surface décrite par CE.

D'où l'on déduit immédiatement que le volume engendré par tout polygone circonscrit à un cercle a pour mesure la surface multipliée par le tiers du rayon du cercle.

Cette méthode me paraît mener plus simplement au but que l'on se propose.

~~Galois~~

Soit SABC une pyramide ~~triangulaire~~. Si le plan SAD coupe en deux également l'angle des plans SAC, SAB, on aura la proportion BD : CD :: surf. SAB : surf. SAC.



1 Par C menez une parallèle à SA, sur cette parallèle prenez C' tel que l'angle SAC' = SAB.

Soit D' l'intersection de BC' avec le plan SAD.

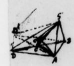
La droite CC' est ~~parallèle~~ au plan SAD ou SAD'; Donc on aura la proportion BD : CD :: BD' : CD'.

D'un autre côté, puisque CC' est parallèle à SA, les triangles SAC, SAC', ont même base et même hauteur, donc on a SAC = SAC'.

Cela posé, les triangles SAB, SAC' ayant un angle égal et un côté commun, seront comme les côtés adjacents à cet angle. Et l'on aura SAB : SAC' :: AB : AC'. Mais la droite AD' divise en deux parties égales l'angle BAC'. En effet les angles trièdres ASD'C', ASD'B sont égaux comme ayant un angle dièdre égal compris entre faces égales. Donc on aura AB : AC' :: BD' : CD'. Donc aussi SAB : SAC' :: BD' : CD', et enfin

SAB : SAC :: BD : CD.

La construction et la démonstration seraient absolument la même si l'on voulait démontrer que le plan qui divise en deux parties le supplément de l'angle dièdre jouit de la même propriété.



2

Ainsi l'on peut appliquer à la figure 2 tout ce que nous avons dit sur la figure 1, et l'on trouvera de même DC : DB :: surface SAC : surf. SAB.

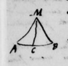
~~Soit SABC~~ une pyramide triangulaire ; si par le sommet S on mène SD telle que chacun de ses points soit également distant des trois faces de l'angle S, et D est le point d'intersection de CD avec la base, on aura les triangles

DAB : DAC : DCB :: SAB : SAC : SCB.

Les pyramides SDAB, SDAC, SDCB, ayant même hauteur, sont entre elles comme leurs bases DAB, DAC, DCB.

Ces pyramides ayant, par hypothèse, mêmes hauteurs en D, sont comme leurs bases SAB, SAC, SCB. Donc, etc.

Lemmes



— Problème. Trouver le lieu des points de la surface d'une sphère également distants de deux points A et B de cette surface.

— Soit M un des points cherchés : je tire l'arc AB et l'arc MC, C étant le milieu de AB. Les deux triangles AMC, CMB sont égaux comme ayant les trois côtés égaux donc l'angle ACM = MCB, et sont droits. Donc le lieu cherché est le grand cercle élevé perpendiculairement sur C milieu de AB.

— Problème. Décrire un cercle qui passe par trois points donnés sur la surface de la sphère.

— Le centre du cercle cherché est également distant des trois points donnés. Soient A, B, C ces points ; le centre se trouvera donc sur le grand cercle élevé perpendiculairement sur le milieu de AB, puis sur le grand cercle élevé perpendiculairement sur le milieu de AC, et sera l'intersection de ces deux cercles. Connaissant le centre du cercle cherché, on aura aussi son rayon, et on pourra décrire le cercle.

— Problème. Trouver le lieu des points d'une sphère également distants de deux circonférences de grands cercles.

— Soient P et P' les points communs des deux circonférences données, M un des points cherchés. Si l'on abaisse sur les circonférences données les perpendiculaires MV et MV', on aura donc MV = MV'. Mais les deux triangles PMV, PMV' sont rectangles, et ont deux côtés égaux chacun à chacun ; donc l'angle MPV = MPV', et le lieu cherché est le grand cercle qui partage en deux également l'angle des deux circonférences données.

— Problème. Décrire un cercle tangent aux trois côtés d'un triangle sphérique.

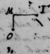
— Le centre du cercle cherché devra donc être à égale distance des trois côtés du triangle. Soient a, b, c, ces côtés. On connaît le lieu des points également distants de a et b et celui

des points également distants de A et C. Donc le centre du cercle cherché sera l'intersection des deux lieux géométriques. Connaissant le centre, on abaissera une perpendiculaire sur l'un des côtés du triangle, et cette perpendiculaire sera le rayon du cercle cherché.

— Problème. Trouver 1° le lieu des poles; 2° le lieu des centres de tous les cercles de la sphère tangents en un même point de sa surface.

— Tous les rayons sphériques de ces cercles qui passent par le point de tangence, seront donc perpendiculaires à un même grand cercle, et par conséquent tous sur un même grand cercle, qui sera le lieu cherché des poles.

En second lieu, les rayons rectilignes de chacun de ces cercles aboutissant par le point donné devant être tous perpendiculaires à leur tangente commune, seront tous dans un même plan. Soit T le point donné, O, le centre de la sphère, M un des centres cherchés, on aura l'angle OMT droit, et comme tous les points M sont dans un même plan, le lieu cherché sera la circonférence décrite sur OT comme diamètre.



— Problème. D'un point P pris hors d'une sphère dont le centre est O, on mène à la sphère une infinité de tangentes. On demande 1° le lieu des tangentes — 2° le lieu des points de contact.

Soit T un des points de contact. Le triangle OPT a trois éléments constants : OT rayon de la sphère, OP distance du centre au point donné, et l'angle OTP droit. Donc aussi l'angle OPT est constant, et le lieu des tangentes est un cône, décrit par la révolution de la droite PT sur l'axe OP.

Ensuite, puisque l'angle TPO est constant, la perpendiculaire QT sur OP est constante, et le point Q est fixe. Donc le lieu des points T est une circonférence de cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe OP. —

— Théorème. Si un point A est situé sur la circonférence d'un grand cercle B d'une sphère, la circonférence du grand cercle qui a ~~le point~~ A pour pole passe par les poles du grand cercle B.

— Car puisque ce nouveau grand cercle a pour pole le point A, la distance de chacun de ses points au point A sera un quadrant, et tout point situé à une telle distance de A sera sur cette circonférence. Or les poles du cercle B sont des points à une pareille distance. Donc, &c.

— Théorème. Tant de points que l'on voudra A, A', A'', &c, étant situés sur la circonférence d'un grand cercle B, les circonférences des grands cercles qui ont les points A, A', A'' pour poles se coupent en deux points qui sont les poles du grand cercle.

— Car d'après le théorème précédent chacune de ces circonférences passe par les poles du cercle B. D'ailleurs, deux grands cercles quelconques ne peuvent se couper qu'en deux points, lors même que leurs plans auraient [illegible] en ligne droite. Donc, &c.

— Problème. Trouver le lieu des poles des [illegible] cercles dont la circonférence passe par les extrémités d'un même diamètre.

— Tous les poles cherchés seront donc à une distance des ces extrémités égale à un quadrant. Leur lieu sera donc la circonférence de grand cercle décrite de ces extrémités comme poles, et le problème est résolu.

— Théorème. Si un point de la surface d'une sphère est également distant de trois points de la circonférence d'un cercle, ce point est le pole du cercle.

— Soit P le point donné, A, B, C les trois points de la circonférence. Je tire les rayons OP, OA, OB, &c. Le rayon OP rencontre le plan ABC en un point M. Les angles MOC, MOB, MOA sont égaux. Donc $MC = MB = MA$. Donc M est le centre du cercle. Donc, &c.

Soit A un point quelconque d'un hemisphere. Si l'on abaisse l'arc AX perpendiculaire sur le grand cercle qui sert de base à l'hemisphere, on aura entre l'arc AM et l'~~angle~~ arc MX la relation,

$$\cos AM = \cos AX \cos MX$$

M étant un point quelconque du grand cercle.

Soit O le centre de la sphere. Par le point A je mene un plan perpendiculaire au plan OM; soit Q le point d'intersection de ce plan avec OM. On aura $OQ = \cos AM = \cos AX \cos MX$. Donc, &c

---

les spheres ex-inscrites ... diametres aux ~~...~~ faces f', f'', f''', f ... comme ci dessus, on obtiendra les deux théorèmes

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} + \frac{1}{h'''} + \frac{1}{h^{IV}}\,, \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} + \frac{1}{r^{IV}}\right), \quad \cdots\cdots (2)$$

2/10

Théorème. 1° La corde de contact AB de tous les angles circonscrits à un cercle et dont les sommets M sont ~~situés sur une~~ droite donnée de position MN, coupent toutes en un même point la perpendiculaire MK sur MN, ~~passent toutes par un même point~~, et 2° le lieu des sommets M de tous les angles circonscrits à un cercle dont les cordes de contact AB passent par un point donné est la ligne ~~droite~~ MK perpendiculaire à CP.

Soit O le pied de la perpendiculaire CM sur AB. ~~Les triangles semblables CKM~~, ~~(en prenant l'angle CKM droit, ce qu'on peut faire, puisque dans l'un et l'autre point de l'énoncé il ne s'agit que des deux droites CP, MN,~~ ~~Les triangles semblables CKM sont donnés~~).; COP, et les ~~triangles semblables~~ CAM, COA, donnent les deux proportions

$$CM : CP :: CK : CO$$

$$CM : CA :: CA : CO$$

d'où $CP \times CK = \overline{CA}^2$. Donc si le point P est fixe, le point K le sera aussi, et reciproquement. ~~Donc~~ Le point K est le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur CP. Le point P est dit pole de la droite MK, et la droite MK la polaire du point P.

Théorème. Si le pole P de la droite LK est sur la droite L'K', le pole P' de la droite L'K' sera sur la droite LK. Car puisque P est le pole de LK, et P' de L'K', on aura $CP \times CK = CP' \times CK'$, d'où le point P' devra former avec CK un ~~triangle~~ semblable à PCK et ~~par conséquent~~ se trouvera sur KL.

Problème de Géométrie.

Soient c', c'', c''', les cotés d'un triangle, s sa double surface, on aura les deux identités

$$\frac{c'+c''+c'''}{s} = \frac{c'}{s} + \frac{c''}{s} + \frac{c'''}{s}, \quad \ldots (1)$$

$$\frac{c'+c''+c'''}{s} = \frac{-c'+c''+c'''}{s} + \frac{-c''+c'+c'''}{s} + \frac{-c'''+c''+c'''}{s}, \ldots (2)$$

~~Mais~~ en désignant par r le rayon du cercle inscrit, par h', h'', h''', les hauteurs respectivement perpendiculaires aux cotés c', c'', c''', par r', r'', r''', les rayons des cercles ex-inscrits ~~tangents~~ respectivement en contact immédiat avec les cotés c', c'', c''', on aura, évidemment,

$$rc' + rc'' + rc''' = s, \text{ d'où } \quad \frac{c'+c''+c'''}{s} = \frac{1}{r}$$

$$h'c' = s \qquad \frac{c'}{s} = \frac{1}{h'}$$

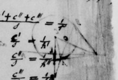
$$h''c'' = s \qquad \frac{c''}{s} = \frac{1}{h''}$$

$$h'''c''' = s. \qquad \frac{c'''}{s} = \frac{1}{h'''}$$

$$-r'c' + r'c'' + r'c''' = s \qquad \frac{-c'+c''+c'''}{s} = \frac{1}{r'}$$

$$-r''c'' + r''c' + r''c''' = s \qquad \frac{-c''+c'+c'''}{s} = \frac{1}{r''}$$

$$-r'''c''' + r'''c' + r'''c'' = s \qquad \frac{-c'''+c'+c''}{s} = \frac{1}{r'''}$$



Substituant ces valeurs, on aura ces deux théorèmes

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} + \frac{1}{h'''}, \ldots (1)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''}, \ldots (2)$$

~~Soient~~ Soient f', f'', f''', f^{IV} les faces d'une pyramide triangulaire, s sa triple solidité, on aura de même,

$$\frac{f'+f''+f'''+f^{IV}}{s} = \frac{f'}{s} + \frac{f''}{s} + \frac{f'''}{s} + \frac{f^{IV}}{s}, \ldots (1)$$

$$\frac{f'+f''+f'''+f^{IV}}{s} = \frac{1}{2}\left(\frac{-f'+f''+f'''+f^{IV}}{s} + \frac{-f''+f'+f'''+f^{IV}}{s} + \frac{-f'''+f'+f''+f^{IV}}{s} + \frac{-f^{IV}+f'+f''+f'''}{s}\right), \ldots (2)$$

Appelant r le rayon de la sphère inscrite, h', h'', h''', h^{IV}, les hauteurs respectivement perpendiculaires aux faces f', f'', f''', f^{IV}, ~~par~~ r', r'', r''', r^{IV}, les [illegible]

~~Travaux~~

Théorème. Soit un triangle quelconque ABC. On prend sur deux cotés quelconques AC, BC des quantités AB', $A'B$ égales au troisième AB. Je dis 1° que tout point O de la droite indéfinie $A'B'$, est tel que la somme algébrique des distances de ce point à chacun des 3 cotés du triangle, est constante; 2° que toute parallèle à $A'B'$ jouit de la même propriété et que réciproquement toute droite qui jouit de cette propriété est parallèle à $A'B'$.

Car 1°, si O est un point de la droite $A'B'$, la somme algébrique des triangles OAB, OAB', $OA'B$, est constante et égale au quadrilatère $ABA'B'$. De plus les bases AB, AB', $A'B$, des trois triangles sont égales. Donc la somme algébrique de leurs hauteurs respectives sera une quantité constante $= \frac{2\,ABA'B'}{AB}$

2°. Soit MN une droite quelconque parallèle à $A'B'$, et O un point de cette droite. La somme algébrique des triangles OAB, OAB', $OA'B$, $OA'B'$, est constante et égale au quadrilatère $ABA'B'$. Le triangle ~~A~~ $OA'B'$ est constant comme ayant une base $A'B'$ constante, et une hauteur constante. Donc la somme algébrique des triangles OAB, OAB', $OA'B$, est constante, Donc, &c.

Je dis réciproquement que si une ligne MN est telle que la somme algébrique des distances de chacun de ses points O aux trois cotés du triangle ABC, on aura MN parallèle à $A'B'$. En effet, puisque la somme algébrique des hauteurs des triangles OAB, OAB', $OA'B$, est constante, leur somme algébrique sera aussi constante. Mais la somme algébrique des triangles OAB, OAB', $OA'B$, $OA'B'$, est constante. Donc le triangle $OA'B'$ est constant, et comme sa base $A'B'$ est constante, sa hauteur le sera aussi. Donc, &c.

Corollaire. Ce qui précède donne le moyen, étant donné un ~~triangle~~ ABC, de trouver le lieu des points tels que la somme algébrique de leurs distances aux côtés du triangle soit constante et égale à une droite donnée.

En effet, si l'on multiplie par $\frac{1}{2}$ AB la droite donnée, on aura la somme algébrique des triangles OAB, OAB', OA'B; retranchant de cette somme celle du ~~[illegible]~~ quadrilatère ABA'B', on aura la surface du triangle OA'B', et partant sa hauteur, puisqu'on connaît sa base A'B'.

Si la ~~[illegible]~~ droite était nulle, le triangle OA'B' devrait être équivalent égal au quadrilatère ABA'B'.

Problème. Les quantités A', B, B' étant données, trouver les quantités A et B.

On a les deux proportions,

$$A + A' : A' :: B' ; \quad \text{d'où} \quad 2A + 2A' :: 2A' : B$$

$$\text{et} \quad 2A : A + A' :: B' : B$$

D'où l'on déduit à cause de l'égalité des extrêmes,

$$A + A' : A' :: 2A' : B'$$

Donc dividendo,

$$A : A' :: 2A' - B' : B'$$

proportion qui donnera la valeur de A. Connaissant A on aura celle de B par la proportion

$$A : A' :: A' : B.$$

Théorème. Dans tout polygone d'un nombre de côtés pair circonscrit à un cercle, la somme des côtés de rang impair est égale à la somme des côtés de rang pair, en prenant pour premier côté, tel côté qu'on voudra, et consécutivement dans tel sens qu'on voudra. Et dans tout polygone d'un nombre de côtés impair circonscrit à un cercle, la somme des côtés de rang impair surpasse la somme des côtés de rang pair de deux fois le segment adjacent à l'angle formé par le premier et le dernier côté.

Mettez aux ~~termes~~ côtés de rang impair le signe +, aux côtés de rang pair le signe moins. Chaque ~~segment~~ côté se partage en deux segments, chacun adjacent à un angle différent.

Cela posé, on sait que deux segments adjacents au même angle sont égaux. Donc si les côtés dont ils font partie, sont de signes contraires, ils se détruiront. Or, dans le cas où le nombre des côtés est pair, deux côtés quelconques adjacents sont de signes contraires, donc la différence entre la somme des côtés de rang pair et celle de rang impair est nulle. Dans le cas où le nombre des côtés est impair, il n'y a que le premier et le dernier qui, étant adjacents, soient de même signe. Donc le double segment adjacent à l'angle formé par le premier et le dernier côté, sera le résultat total de la soustraction.

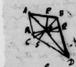
Corollaire. Soient $A, B, C, \ldots, K$ les côtés du polygone, leur nombre étant impair, on aura donc pour l'expression du segment ~~adjacent~~ à l'angle compris entre les côtés A et K, $\frac{1}{2}(A - B + C - \ldots\ldots + K)$. On aura de même pour l'expression du segment adjacent à l'angle compris entre B et A, $\frac{1}{2}(B - C + \ldots\ldots - K + A)$, et ainsi de suite.

Corollaire II. Ce qui précède donne encore le moyen de trouver la surface d'un polygone circonscrit d'un nombre impair de côtés, en fonctions de ses côtés et d'un de ses angles. En effet on connaît le segment adjacent à cet angle, et on pourra en déduire le rayon. Et comme la surface est égale au périmètre par la moitié du rayon, on obtiendra ~~de suite~~ son expression. On trouvera ainsi, en appelant $2v$ l'angle donné, et désignant par r et s le rayon et la surface, $r = \frac{1}{2}(A - B + C - \ldots\ldots + K)\tang v$, et

$$s = \frac{1}{2} r (A + B + C + \ldots\ldots + K) = \left[(A + C + \ldots + K)^2 - (B + \ldots)^2\right]$$

supposé que l'angle v soit compris par les côtés A et B.
Si l'on avait $2v$ égal à un angle droit, il viendrait $\tang v = 1$, et l'expression se simplifierait.

Théorème. Si un quadrilatère $ABCD$ est tel que la somme de deux côtés AB, CD opposés soit égale à la somme des deux autres AC, BD, il sera circonscrit à un cercle.



Divisez en deux également par ~~des~~ lignes droites ~~chacun~~ deux des angles du quadrilatère $ABCD$. Soit O le point d'intersection de la droite qui divise en deux l'angle B avec celle qui divise en deux l'angle A. Il est clair que chacune des perpendiculaires abaissées de ce point O sur AB, AC, BD, sont égales. Reste à prouver que la perpendiculaire OS sur CD leur est encore égale. Or de ce que $AB + CD = AC + BD$, et de $AB = AR + BQ$, nous aurons $CD = CR + DQ$. Posez le point R sur le point Q et la ligne RC sur la ligne DQ en $R'C'$ en prolongeant $DC' = DQ + RC$. Les deux triangles OCD, $OC'D'$ seront égaux comme ayant leurs trois côtés égaux. Donc aussi les perpendiculaires $OS = OQ$. Ce qu'il fallait démontrer.

Théorème. Dans tout polygone d'un nombre pair de côtés inscrit dans un cercle, la somme des angles de rang impair est égale à la somme des angles de rang pair. Et dans tout polygone d'un nombre impair de côtés, inscrit dans le cercle, la somme des angles de rang impair surpasse la somme des angles de rang pair d'une quantité égale à l'espace d'une demi circonférence ~~sur l'arc~~ sous-tendu par le côté commun au premier et au dernier angle.

Mettez aux angles de rang impair le signe $+$, à ceux de rang pair le signe $-$. Tirez des rayons à tous les sommets du polygone. Chacun le partagera en deux segments, chacun adjacent à un côté différent. Or, comme on sait, que deux segments adjacents au même côté seront égaux; donc si les angles dont ils font partie sont de signes contraires, ils se détruiront. Or, dans le cas où le nombre des côtés est pair, deux angles quelconques adjacents au même côté sont de signes contraires. Donc dans ce cas, tout se détruit, et la différence d'une somme avec l'autre est nulle. Lorsque le nombre des côtés est impair, il n'y a que le premier et le dernier angle qui soient adjacents au même côté, et de même signe. Donc la somme des deux segments adjacents à ce côté, c'est à dire le supplément de l'arc que la corde sous-tend sera la différence des deux sommes.

Corollaire. Soient $a, b, c, \ldots k$, les angles du polygone, leur nombre étant impair, on aura donc pour l'expression de ~~la corde~~ l'arc que sous-tend le côté commun à a et k, suppl. de $a - b + c - \ldots\ldots + k$. On aurait de même pour l'expression ~~du segment adjacent à l'angle~~ de l'arc sous-tendu par le côté commun à b et a, la quantité $b - c + \ldots\ldots - k + a$, et ainsi de suite. Pour trouver les expressions des arcs sous-tendus par les diagonales du polygone, il suffira d'ajouter, deux à deux, trois à trois, les arcs sous-tendus par les côtés.

E. Galois 244

Problème.

Trouver le rayon côté du pentédécagone inscrit.

Soit $OA = 1$ le rayon, AB le côté de l'hexagone, AC celui du décagone; CB sera celui du pentédécagone. Du point A sur CB prolongé, j'abaisse AM perpendiculaire. Du point O sur les côtés AB, AC, je mène les perpendiculaires OP, OQ. J'aurai $AB = 1$, $AC = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $OP = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $OQ = \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}$.

Et c'est de ces expressions qu'il s'agit de déduire celle de CB.

Or j'observe que les deux triangles rectangles OAQ, BAM ont l'angle $ABM = AOQ$, le côté $AB = OA$; donc ils sont égaux; donc $BM = OQ = \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}$. De plus les triangles rectangles AMC, APO, ont l'angle $ACM = AOP$. Donc ils sont semblables et $MC : AC :: OP : AO$, d'où $MC = \frac{(-1+\sqrt{5})\sqrt{3}}{4}$.

Retranchant cette expression de celle de BM, on trouve,

$$-MC + BM \text{ ou } CB = \frac{1}{4}\left[-(-1+\sqrt{5})\cdot\sqrt{3} \mp \sqrt{(10+2\sqrt{5})}\right]$$

Problème.

Étant donnés une circonférence et deux points A et B de cette circonférence, trouver le lieu géométrique des points D tels que $CD : CB :: m : n$, C étant l'intersection de AD avec la circonférence donnée.

Il y a évidemment deux solutions pour une position de la droite AC, l'une en dedans, l'autre en dehors du cercle. Mais dans tous les cas on connaît l'angle ACB, comme inscrit dans un segment donné, ou comme supplément d'un pareil angle. On connaît le rapport $CD : CB$; donc, par une proposition connue, on aura les autres angles du triangle BCD. Et par conséquent l'angle ADB est donné. On construira donc sur AB un segment capable de cet angle, qui, ayant deux valeurs, à cause de la double solution qui correspond à chaque position de C, donnera deux lieux géométriques.

Problème.

Trois droites étant données de grandeur et de position, trouver un point tel qu'il forme avec ces trois droites trois triangles équivalents.

Soient a, b, c les longueurs des trois lignes données. Si l'on désigne par A, B, C, les perpendiculaires abaissées du point cherché sur chacune d'elles respectivement, on aura $Aa = Bb = Cc$.

Ainsi le problème est proprement, étant données trois droites de direction, trouver un point tel que les perpendiculaires abaissées de ce point sur les trois droites, soient réciproquement proportionnelles aux quantités a, b, c.

Supposons d'abord que les trois droites se rencontrent.

Je décomposerai la recherche du point en deux parties. Je chercherai le lieu géométrique du point tel que les perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux droites qui se rencontrent, [illegible] le lieu des points tels que les perpendiculaires abaissées sur deux autres droites qui se rencontrent, soient :: $c : a$

Voici la solution de ce problème général :

Les lignes OA, OB étant données, trouver le lieu des points M tels que $MP : MQ :: b : a$

Prenant $OA' = a$, $OB' = b$, joignons O au milieu de $A'B'$, ~~[illegible]~~, par là il est clair que tout point de cette droite satisfera à la proportion.

Prenant de même de l'autre côté de O, $OB'' = b$, et joignant O au milieu de $A'B''$, on obtiendra une nouvelle ligne droite, en sorte que le lieu géométrique se composera de deux droites.

De même, le lieu géométrique des ~~points tels~~ que les perpendiculaires abaissées sur AO et la troisième droite donnée soient :: $c : a$, se composera de deux droites, et l'intersection des deux lieux géométriques donnera quatre ~~points~~ qui satisferont à la question.

Si deux droites données étaient parallèles, il est clair

que la question pourrait se traiter de même.

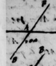
Si toutes trois étaient parallèles le problème serait impossible ou indéterminé. 245

Problème

Étant donnés une circonférence et deux points A et B sur cette circonférence, trouver le lieu des points O, tels que prolongeant AO et BO jusqu'à leur rencontre de la circonférence en C et en D, on ait DC = une droite donnée.

Puisque la corde DC est donnée, l'arc qu'il soutend est connu ; on aura donc la demi-somme des deux arcs AB, CD, qui n'est que l'angle AOB. Ainsi cet angle est donné, et il suffira de construire un segment capable de sa valeur, qui sera le lieu cherché.

Galois



Problème. Trouver le lieu géométrique des points M tels que la somme de leurs distances à deux droites données de position, AB, AC, soit = h.

— Les deux droites forment quatre espaces angulaires, ce qui forme quatre cas suivant que M est dans l'un ou l'autre de ces quatre espaces, et il nous suffira de donner le lieu géométrique demandé dans l'un de ces cas, puisque les trois autres sont absolument semblables.

Soit donc OP une droite menée dans l'angle BAC parallèlement à AC, suivant la distance h. Soit M un des points cherchés, ME, ME', ses distances aux droites AC, AB; ME'' sa distance à la droite OP. On aura donc $h = ME + ME' = ME + ME''$, et $ME' = ME''$. Ainsi tous les points M sont également distants de AO, et OP, et leur lieu est une droite qui divise en deux également l'angle AOP.

— Si l'on prolongeait cette droite au delà de l'angle BAC, on aurait alors pour la différence et non pour la somme des deux distances. Ainsi il faudra pour les points situés hors de l'angle BAC construire un nouveau lieu par le même moyen qui a été suivi.

Problème. Soit CAB un triangle isoscèle, D un point de la base AB. Je dis que $\overline{AC}^2-\overline{CD}^2 = \pm AD \times BD$, suivant que D est ou non entre les points A et B.

— J'abaisse CO perpendiculaire sur la base: j'aurai $\overline{AC}^2=\overline{AO}^2+\overline{CO}^2$, et $\overline{CD}^2=\overline{OD}^2+\overline{CO}^2$, d'où $\overline{AC}^2-\overline{CD}^2=\overline{AO}^2-\overline{OD}^2$; or on a, comme on sait, $\overline{AO}^2-\overline{OD}^2=(AO+OD)(AO-OD)$. Mais $AO+OD=AD$, et d'ailleurs $AO-OD=\pm BD$, suivant que D est ou non ~~entre~~ les points A et B. Substituant, &c.

Problème. Trouver le lieu géométrique des sommets M de tous les triangles ayant pour base AB, ~~et où la distance de A au milieu de BM~~ = D.

— Le lieu des milieux de ~~BM~~ est un cercle décrit du centre A avec le rayon. Ainsi le problème est ~~proposé, étant~~ donné un cercle et un point B, trouver le lieu géométrique de tous les ~~points tels~~ que la distance du point B à l'un des points ~~de la circonférence~~ soit divisée en deux également par la circonférence donnée.

Or le produit des deux distances de B à la circonférence suivant une même direction est constant. Ainsi le produit des deux distances de B au lieu cherché suivant une même direction quelconque est constant et égal à quatre fois le premier produit. Donc le lieu géométrique cherché est un cercle. Pour l'avoir il suffit de prendre la direction des distances sur le diamètre du cercle donné et prolongeant de part et d'autre les deux distances d'une quantité égale à elles-mêmes, on aura les points du lieu cherché, qui seront les extrémités du diamètre.

$AB = a$

Problème. Trouver le lieu des sommets M des triangles dont la base est donnée de grandeur et de position, et tels qu'en designant par b et c les deux autres côtés, on ait la surface du triangle : $b^2+c^2-a^2 :: m:n$. Sur le milieu C de la base AB, j'élève CO qui soit à AC :: $4C$? : $4n$. Du point O et du rayon OA je décris un cercle qui sera le lieu demandé. En effet, soit M un des points de ce cercle. Je mène AD perpendiculaire à BM. La surface du triangle $= \frac{1}{2} BM \times AD$; la quantité $b^2+c^2-a^2 = 2\, BM \times MD$. Ainsi on aura Surf. : $b^2+c^2-a^2 :: \frac{1}{2} AD : 2MD :: AD : 4MD$. Mais l'angle AMD est constant et égal à AOC. Ainsi on aura $\underline{AD} : 4MD :: AC : 4OC :: 4m : 4n$. Donc

Problème : Trouver le lieu des points tels qu'en designant par x et y leurs distances à deux points donnés, on ait $(x-y)^2 - mxy = 0$, $x^2-y^2-mxy=0$, $(x+y)^2-mxy=0$, $x^2+y^2-mxy=0$. Pour résoudre tous les problèmes, je divise par y^2 les quatre équations et j'ai

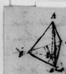
$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{x}{y}-1\right)^2 - m\frac{x}{y} = 0 \\ &\frac{x^2}{y^2} - 1 - m\frac{x}{y} = 0 \\ &\left(\frac{x}{y}+1\right)^2 - m\frac{x}{y} = 0 \\ &\frac{x^2}{y^2} + 1 - m\frac{x}{y} = 0 \end{aligned}\right\} \text{D'où} \quad \begin{aligned} &\frac{x}{y} = \frac{(m+2) \pm \sqrt{(m+2)^2-4}}{2} \\ &\frac{x}{y} = \frac{m \pm \sqrt{m^2+4}}{2} \\ &\frac{x}{y} = \frac{(m-2) \pm \sqrt{(m-2)^2-4}}{2} \\ &\frac{x}{y} = \frac{m \pm \sqrt{m^2-4}}{2} \end{aligned}$$

Ainsi il suffit de construire l'équation $x:y :: p:q$, $p:q$ étant donné. Soit AB la base donnée, ~~je construis un triangle dont les autres côtés soient [illegible] ... [illegible] perpendiculaire [illegible] ... En effet si M est un [illegible] perpendiculaire~~

Si M est un des points cherchés, on aura $AM : BM :: p : q$, ~~[illegible] $\overline{AM}^2$ ... [illegible] ... $\overline{BM}^2$ ... $p^2 : q^2$ [illegible]~~ : d'où l'on déduit, tout calcul fait, que le lieu géométrique cherché est un cercle décrit d'un centre pris sur la base à la distance $\frac{p^2+q^2}{p^2-q^2}a$ avec le rayon $\frac{2pq\,a}{p^2-q^2}$.

~~On construira~~ Si l'on [illegible] la proportion $x+y : x-y :: x : y$, qui donne $\frac{x}{y} = 1 \pm \sqrt{2}$.

demême à BC. 247



Du point A sur la base BCD abaissons AP perpendiculaire; AP sera perpendiculaire à BD. Donc BD sera perpendiculaire à deux droites AP et AC du plan PAC. Donc il sera perpendiculaire à PC droite de même plan. On prouvera demême que CD est perpendiculaire BP. Les deux côtés CD et BD étant perpendiculaires à BP et à CP, BC sera, par le théorème connu sur les trois hauteurs d'un triangle, perpendiculaire à DP. Donc BC sera perpendiculaire à deux droites AP, PD du plan PAD. Donc il sera perpendiculaire à AD. Ce qu'il fallait prouver.

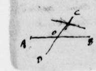
5° Théorème. Soient A et B les extrémités de la perpendiculaire commune à deux droites non situées sur un même plan. Si l'on prend sur l'une d'elles à partir du point A, $AD' = AD$, et sur l'autre à partir du point B, $BC' = BC$, les droites CD et C'D' seront égales entre elles : les angles CDA, C'D'A' seront égaux ainsi que les angles DCB et D'C'B. Les distances des points C et C' à la droite DAD' seront égales entre elles ainsi que les distances des points D et D' à la droite CBC'.

En effet les deux tétraèdres ABDC, ABD'C', ayant les bases égales $ABD = ABD'$, $ABC = ABC'$, et les angles des plans de ces bases, égaux comme opposés au sommet, seront égaux. Donc toutes leurs lignes et leurs angles homologues seront égaux, et le théorème est démontré.

6° Description de la surface engendrée par l'une des droites tournant autour de l'autre de manière que chaque point décrive une circonférence de cercle dont le plan soit perpendiculaire à la droite ~~donnée~~ fixe et dont le centre soit sur cette droite.

Soit MN la droite fixe, PQ la droite mobile; SR leur plus courte distance; si l'on mène par R la droite P'Q' parallèle à PQ, et qu'on la fasse tourner autour de MN en même temps que PQ, on aura un cône droit, qui sera touché à chacune de ses positions du plan PQP'Q', à cause que ce plan est perpendiculaire au plan MNP'Q'. Ainsi l'on peut définir de la manière suivante la surface proposée: soit un cône droit menez tant de plans ~~tangentes~~ que vous voudrez prenez sur chaque plan ~~tangent~~ à la distance constante SR de la droite de contact, une droite parallèle. Le lieu de toutes les droites ainsi formées sera la surface en question. On reconnaîtra de cette manière que cette surface enveloppe de toutes parts le cône qu'elle ne peut pénétrer et qu'on appelle pour cela cône asymptotique. La surface elle-même prend le nom d'hyperboloïde de révolution.

Surface engendrée par une droite assujettie à couper constamment deux droites qui ne se rencontrent pas et à rester parallèle à un plan donné.



Pour se représenter cette surface, on imaginera que AB étant une des deux droites données, et CD soit une des droites qui demandées. Toute nouvelle

droite qui satisfera à la question, si elle passe en partie sur AB du côté OB, sera ~~au dessus~~ en partie au dessus de COB en partie au dessous de BOD, et si elle passe du côté OA, en partie au dessus de AOD en partie au dessous de AOC. Ainsi la surface se composera de quatre parties l'une au dessus de COB, l'autre au dessous de BOD, la troisième au dessus de AOD, et enfin la dernière au dessous de AOC. Cette surface s'appelle paraboloïde hyperbolique.

Surface engendrée par une droite assujettie à couper constamment trois droites données et non situées dans un même plan.

Cette surface est une hyperboloïde à une nappe et ses propriétés ne peuvent guère se déduire que par l'analyse.

7° Si l'on prend deux droites MN, PQ qui ne se rencontrent pas dans l'espace, et deux couples de points A et B, A' et B' sur la 1re, deux couples de points C et D C' et D' sur la seconde, les tétraèdres ABCD, A'B'C'D' seront comme le produit AB×CD : A'B'×C'D'.

Je forme les parallélogrammes BACO, B'A'C'O', je joins OD, O'D'. Les tétraèdres ABCD, A'B'C'D' seront respectivement équivalents aux tétraèdres OBCD, O'B'C'D' et ainsi il suffit de démontrer la proposition pour les tétraèdres OBCD, O'B'C'D'. Or ces tétraèdres ayant pour hauteur commune la distance des droites MN, PQ, seront entre eux comme leurs bases OCD, O'C'D', lesquelles seront elles-mêmes comme le produit OC×CD : O'C'×C'D' :: AB×CD : A'B'×C'D'

6° Description de la surface engendrée par l'une des droites tournant autour de l'autre de manière que chaque point décrive une circonférence de cercle dont le plan soit perpendiculaire sur la droite ~~[illegible]~~ fixe et dont le centre soit sur cette droite.

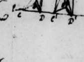
Soit MN la droite fixe, PQ la droite mobile; SR leur plus courte distance; si l'on mène par R la droite P'Q' parallèle à PQ, et qu'on la fasse tourner autour de MN en même temps que PQ, on aura un cône droit, qui sera touché à chacune des positions du plan PQP'Q', à cause que ce plan est perpendiculaire au plan MNP'Q'. Ainsi l'on peut définir de la manière suivante la surface proposée: ~~Soit~~ Etant un cône droit menez tant de ~~tangentes~~ plans que vous voudrez prenez sur ~~le~~ chaque plan ~~tangent~~ à la distance constante SR de la droite de contact, une droite parallèle. Le lieu de toutes les droites ainsi formées sera la surface en question. On reconnaîtra de cette manière que cette surface enveloppe de toutes parts le cône qu'elle ne peut pénétrer et qu'on appelle pour cela cône asymptotique. La surface elle-même prend le nom d'hyperboloïde de révolution.

Surface engendrée par une droite assujettie à couper continuellement deux droites qui ne se rencontrent pas et à rester parallèle à un plan donné.

Pour se représenter cette surface, on imaginera que AB étant une des deux droites données, et CD soit une des droites qui demandées. Toute nouvelle droite qui satisfera à la question, ~~[illegible]~~ si elle passe sur AB du côté OB, sera ~~[illegible]~~ en partie au-dessus de COB en partie au-dessous de BOD, et si elle passe du côté OA, en partie au-dessus de AOD en partie au-dessous de AOC. Ainsi la surface se composera de quatre parties l'une au-dessus de COB, l'autre au-dessous de BOD, la troisième au-dessus de AOD, et enfin la dernière au-dessous de AOC. Cette surface s'appelle paraboloïde hyperbolique.

Surface engendrée par une droite assujettie à couper continuellement trois droites données et non situées dans un même plan.

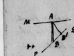
Cette surface est une hyperboloïde à une nappe dont les propriétés ne peuvent guère se déduire que par l'analyse.



7° Si l'on prend deux droites MN, PQ qui ne se rencontrent pas dans l'espace, et deux couples de points A et B, A' et B' sur la 1re, deux couples de points C et D C' et D' sur la seconde, les tétraèdres ABCD, A'B'C'D' seront comme le produit AB×CD : A'B'×C'D'.

Je forme les parallélogrammes BACO, B'A'C'O'. je joins OD, O'D'. Les tétraèdres ABCD, A'B'C'D' seront respectivement équivalents aux tétraèdres OBCD, O'B'C'D' et ainsi il suffit de démontrer la proposition pour les tétraèdres OBCD, O'B'C'D'. Or ces tétraèdres ayant pour hauteur commune la distance des droites MN, PQ, seront entre eux comme leurs bases OCD, O'C'D', lesquelles seront elles-mêmes comme le produit OC×CD : O'C'×C'D' :: AB×CD : A'B'×C'D' ce qu'il fallait démontrer.

Galois



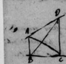
1° Théorème. Deux droites MN, PQ ~~qui ne se rencontrent~~ non situées dans un plan, étant données dans l'espace, si parmi les droites terminées aux droites MN, PQ, il en existe une AB plus courte que toutes les autres, AB sera perpendiculaire à la fois aux deux droites proposées.

Car si AB était oblique à PQ, par exemple, on pourrait mener par A une nouvelle droite AB' terminée à MN et à PQ et moindre que AB. Ce qui est absurde. Donc, &c.

2° Théorème. Il existe une droite AB perpendiculaire à la fois aux deux droites MN, PQ, et il n'en existe qu'une seule.

Prenons un plan parallèle aux deux droites MN, PQ. (Cela est ~~toujours~~ possible en menant par un point quelconque deux parallèles respectives à ces droites et menant un plan par ces deux parallèles.) Soient M'N', P'Q' les projections de MN, PQ sur ce plan. Les deux plans MM'NN', PP'QQ', se coupant suivant une droite qui étant perpendiculaire à M'N' et à P'Q', le sera aussi à leurs parallèles MN et PQ.

Je dis de plus qu'on ne pourra trouver qu'une seule droite à la fois perpendiculaire à MN et à PQ.



Car supposons deux droites AB, CD perpendiculaires à la fois à deux droites non situées dans un même plan.

Dans le tétraèdre ABCD puisque DAB est droit, on aura ABD + ADB = un droit. De même on trouvera CBD + CDB = un droit. Donc la somme des deux angles droits ADC, ABC, serait égale à celle

des quatre angles ABD, ADB, CBD, CDB.
Ce qui est absurde. Donc, &c.

3° Théorème. La perpendiculaire AB commune à deux droites MN, PQ qui ne se rencontrent pas, est la plus courte de toutes les droites terminées aux droites ~~et~~ proposées.
Car soit CD une nouvelle droite terminée aux deux droites. Je mène AA' parallèle à PQ et je prends AA' = BD. On aura évidemment A'D = AB, et j'observe que A'D étant perpendiculaire au plan MAA' le sera perpendiculaire à A'C et par conséquent plus courte que l'oblique CD. Donc, &c.

4° On prend pour angle de deux droites qui ne se rencontrent pas dans l'espace, l'angle formé par deux droites menées parallèlement à ces droites suivant un point quelconque.
Il suit de cette définition, 1° que si une droite est perpendiculaire à deux droites non parallèles ~~quelconques~~ menées dans ce plan, elle sera perpendiculaire à ce plan, puisqu'on pourra mener par son pied deux parallèles à ces deux droites ; 2° que la perpendiculaire à un plan est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan.
De la deuxième proposition il suit que par une droite on ne peut mener un plan perpendiculaire à une autre droite, à moins que ces deux droites ne soient perpendiculaires.

Théorème. ~~Si~~ Dans le tétraèdre ABCD, on a AB perpendiculaire CD et AC à BD, AD le sera

Problème. Étant donnés les côtés $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, d'un quadrilatère inscrit $ABCD$, trouver les diagonales $AC = x$, $BD = y$.

J'aurai $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos ABC$, et de même

$$x^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos ADC = c^2 + d^2 + 2cd \cos ABC.$$

Je multiplie par cd la première de ces équations, par ab la seconde, j'ai

$$cd\, x^2 = cda^2 + cd\, b^2 - 2abcd \cos ABC$$
$$ab\, x^2 = abc^2 + ab\, d^2 + 2abcd \cos ABC$$

Et ajoutant membre à membre ces deux équations

$$(ab + cd)\, x^2 = abc^2 + abd^2 + cda^2 + cd\, b^2$$

Ainsi l'on aura

$$x = \sqrt{\frac{abc^2 + ab\, d^2 + cda^2 + cdb^2}{ab + cd}}$$

On trouverait de même

$$y = \sqrt{\frac{adc^2 + ad\, b^2 + bc\, a^2 + bc\, d^2}{ad + bc}}$$

Cela posé je multiplie entre elles ces deux équations et j'ai (en observant que les deux quantités

$$abc^2 + abd^2 + cda^2 + cdb^2$$
$$adc^2 + adb^2 + bca^2 + bcd^2$$

peuvent se mettre sous la forme

$$(ac + bd)(bc + ad)$$
$$(ac + bd)(ab + cd)$$

par la décomposition en facteurs),

$$xy = \sqrt{(ac + bd)^2} = ac + bd.$$

On trouve de même en divisant l'une par l'autre les deux équations

$$\frac{x}{y} = \frac{ad+bc}{ab+cd}$$

Ce qui redonne les théorèmes connus sur le quadrilatère inscrit.

Problème. Étant donnés un cercle et une droite, trouver un point O, tel que $OA = AT'$, A étant un point quelconque de la droite donnée, et AT' la tangente menée de ce point au cercle donné.

Du centre C du cercle donné abaissons CP perpendiculaire sur la droite donnée. Menons PQ tangente au cercle, prenons $OP = PQ$, je dis que O est le point cherché.

En effet, on a $\overline{CP}^2 = \overline{CQ}^2 + \overline{PQ}^2$, $\overline{CA}^2 = \overline{CT'}^2 + \overline{AT'}^2$

C'est-à-dire retranchant l'une de l'autre ces équations, et observant que $CQ = CT'$, $PQ = OP$,

$\overline{CA}^2 - \overline{CP}^2$ ou $\overline{AP}^2 = \overline{AT'}^2 - \overline{OP}^2$, d'où $\overline{AT'}^2 = \overline{OA}^2$.

Ce qu'il fallait démontrer.

Problème. Étant donnés une circonférence et une droite, trouver le centre X d'une circonférence dont le rayon est p, et telle que A étant un point quelconque de la droite donnée, on ait $\overline{AT}^2 - \overline{AT'}^2 = \pm m^2$, AT et AT' étant les tangentes menées aux deux cercles par le point A.

Soit C le centre du cercle donné, q son rayon.

On a $\overline{AC}^2 = \overline{AT}^2 + q^2$, $\overline{AX}^2 = \overline{AT'}^2 + p^2$, d'où

$$\overline{AC}^2 - \overline{AX}^2 = q^2 - p^2 \pm m^2$$

Abaissons CP perpendiculaire sur la droite des A. Prenons PX tel que $\overline{CP}^2 - \overline{PX}^2 = q^2 - p^2 \pm m^2$. Il est clair que le point X sera le point cherché, puisqu'on aura généralement

$$\overline{AC}^2 - \overline{AX}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{AP}^2 - \overline{PX}^2 - \overline{AP}^2 = q^2 - p^2 \pm m^2.$$

Ainsi le problème est résolu.

On distinguera le cas où $m = 0$. Alors la droite donnée devient l'axe radical des deux cercles. On sait en effet que tous les points de cet axe jouissent de la propriété que les tangentes menées du même point aux deux cercles sont égales.