A la mémoire vénérée de mon oncle Emile Brassinne

B. de Sarrauton

Essai
sur le meilleur système de numération

Avant-propos

Je cherche quel est le système de numération le plus avantageux, celui qu'il faudrait adopter s'il était possible de choisir.

Cette recherche est, à la vérité, dépourvue d'utilité immédiate, car, au temps où nous vivons, il ne saurait être question de changer la numération décimale qui est répandue par toute la terre et fixée par une immense bibliothèque scientifique. Mais il suffit que cette étude soit intéressante au point de vue théorique et qu'elle constitue un utile exercice de calcul, pour qu'elle ne soit pas vaine.

Ce qui prouve qu'elle n'est pas dépourvue d'intérêt, c'est que des esprits éminents n'ont pas dédaigné de s'en occuper. Toutefois, à ma connaissance, la question n'a jamais été traitée dans toute sa généralité. Les géomètres et les philosophes qui l'ont abordée se sont attachés à démontrer que le système décimal n'était pas le meilleur, et que le système duodécimal lui était bien préférable, en quoi ils ont parfaitement réussi. Mais ils n'ont pas étendu leurs investigations jusqu'à rechercher le meilleur de tous les systèmes possibles. Il m'a donc semblé que le sujet n'est pas épuisé. Telle est la raison de ce modeste travail.

La numération décimale n'a prévalu que par un hasard. J'entends, par cette expression, qu'elle n'a pas été l'objet d'un choix raisonné: C'est un instinct qui l'a donnée. L'Histoire et la Linguistique ont à peu près démontré que nous avons dix caractères de numération parceque nous avons dix doigts. Toutefois, on n'a pas toujours et universellement compté par dixaines. Dans les premiers siècles de l'ère chrétienne les peuples de l'Europe balançaient entre le nombre dix et le nombre douze, car si la numération parlée était décimale la plupart des mesures étaient duodécimales. Si, à cette époque, la méthode de numération rationnelle qui est aujourd'hui la nôtre eut été trouvée par un savant européen, il parait assez probable que l'inventeur l'eut appliquée au nombre douze, puisque, en dehors même des avantages évidents du système duodécimal, ce système était admis dans les mesures usuelles. Mais les choses ne se passèrent pas ainsi: Du 8^e au 10^e siècle, cette méthode de numération, qui est indienne d'origine, pénétra en Europe par l'entremise des Arabes. Sa beauté et sa commodité firent passer avec elle le nombre mal choisi auquel elle était appliquée, et la dizaine triompha.

Il semble donc qu'il s'est rencontré, dans l'histoire des peuples modernes, un moment où ils ont été très disposés à adopter, comme base de leur numération un nombre supérieur à dix.

D'autre part, si l'on remonte aux époques les plus reculées dont il soit possible d'évoquer les traditions, on trouve, comme base de numération des nombres inférieurs à dix: le nombre trois, par exemple, et surtout le nombre cinq. L'étude des langues primitives révèle, que avant de compter sur ses dix doigts, l'homme a rapporté les nombres à une seule de ses mains, c'est-à dire qu'il a compté par cinq. Encore aujourd'hui on rencontre des peuplades sauvages qui comptent par quatre. Il parait assez logique d'admettre que le nombre qui sert de base à la numération s'accroit, dans une certaine mesure, en même temps que s'élève le niveau intellectuel, la faculté d'abstraction et l'aptitude pour les sciences. Si ce point de vue est exact, il donne, comme conséquence, cette prévision que le nombre dix doit cesser un jour d'être la base de notre numération pour céder la place à un nombre plus fort. Certainement notre époque ne verra pas ce changement, car il ne peut se produire sans une refonte générale de l'œuvre immense de la science moderne, et une entente parfaite entre les peuples civilisés. Nous sommes bien éloignés d'une pareille entente, mais il faut espérer, et, il est en effet probable que, dans la suite des temps, elle deviendra possible. Il ne serait pas plus difficile d'abandonner la numération décimale pour en adopter une autre plus commode, que de fonder une langue universelle, et personne ne peut affirmer que des faits de ce genre ne trouveront jamais leur réalisation.

I
Classification
des divers systèmes de numération.

J'appellerai, dans cette étude, base seconde d'un système de numération, ou simplement base, le nombre qui, dans ce système, est représenté par l'unité suivie d'un zéro. Et j'appellerai bases premières, les nombres premiers en lesquels la base peut être décomposée. Ainsi, dans le système décimal, les nombres deux et cinq sont les bases premières du système, dont le nombre dix est la base seconde ou simplement la base. Dans le système qui aurait pour base le nombre neuf, ce nombre se représenterait 10, et serait la base du système, tandis que le nombre trois en serait la base première. On voit qu'un système de numération n'a nécessairement qu'une base seconde, tandis qu'il peut avoir une, ou deux, ou même plusieurs bases premières.

De tous les systèmes de numération le plus simple est le système binaire qui peut représenter tous les nombres au moyen de deux signes seulement. Voici comment il représente les seize premiers nombres:

1	1	5	101	9	1001	13	1101
2	10	6	110	10	1010	14	1110
3	11	7	111	11	1011	15	1111
4	100	8	1000	12	1100	16	10.000

Ce système renferme une progression géométrique de raison un demi. Il en résulte que les divisions binaires de l'unité se présentent sous la forme de l'unité elle-même placée en rang convenable après la virgule. Il en résulte aussi que la division d'un nombre quelconque par une puissance de la base première se traduit par un simple déplacement de virgule.

Dans ce système, comme dans tout autre dont la base sera un nombre premier, la base seconde se confond avec la base pre—

mière. Les systèmes qui auraient pour base les nombres trois, cinq, sept, etc. jouiraient de propriétés analogues.

Il n'en serait pas tout à fait de même pour le système qui aurait pour base le nombre quatre. Ici la base est quatre, et la base première est deux.

Voici comment les seize premiers nombres y sont représentés:

1 —	1	5 —	11	9 —	21	13 —	31
2 —	2	6 —	12	10 —	22	14 —	32
3 —	3	7 —	13	11 —	23	15 —	33
4 —	10	8 —	20	12 —	30	16 —	100

Ce système ne diffère que dans la forme du système binaire. Il en a toutes les propriétés. Mais comme la base première ne s'y confond pas avec la base seconde, les divisions binaires de l'unité et les divisions binaires d'un nombre quelconque se présentent sous deux formes:

$\frac{1}{2} = 0,2$	$\frac{3}{2} = 1,2$
$\frac{1}{2^2} = 0,1$	$\frac{3}{2^2} = 0,3$
$\frac{1}{2^3} = 0,02$	$\frac{3}{2^3} = 0,12$
$\frac{1}{2^{10}} = 0,01$	$\frac{3}{2^{10}} = 0,03$

. . . .

et ainsi de suite, indéfiniment.

Considérons maintenant le système dont la base est six. Ce système renferme deux bases premières, deux, et trois. Les vingt quatre premiers nombres y sont représentés comme il suit :

1 ... 1	7 ... 11	13 ... 21	19 ... 31
2 ... 2	8 ... 12	14 ... 22	20 ... 32
3 ... 3	9 ... 13	15 ... 23	21 ... 33
4 ... 4	10 ... 14	16 ... 24	22 ... 34
5 ... 5	11 ... 15	17 ... 25	23 ... 35
6 ... 10	12 ... 20	18 ... 30	24 ... 40

Dans un tel système la division de l'unité, ou d'un nombre quelconque par des puissances croissantes de l'une et de l'autre base première ne présentera plus ce caractère de simplicité qu'elle présente dans le système précédent. Cette division produit des expressions numériques d'autant plus compliquées que les puissances sont plus élevées. Ainsi :

$\frac{1}{2}$ donnera	0,3	$\frac{1}{3}$ donnera	0,2
$\frac{1}{2^2}$ ----	0,13	$\frac{1}{3^2}$ ----	0,04
$\frac{1}{2^3}$ ----	0,043	$\frac{1}{3^3}$ ----	0,012
$\frac{1}{2^4}$ ----	0,0213	$\frac{1}{3^4}$ ----	0,0024
$\frac{1}{2^5}$ ----	0,01043	$\frac{1}{3^5}$ ----	0,00052
$\frac{1}{2^{10}}$ ----	0,003213	$\frac{1}{3^{10}}$ ----	0,000144
....	....	....	....

Ces considérations conduisent à répartir en deux genres tous les systèmes de numération possibles, savoir :

1er Genre : dans lequel la base est une puissance d'un nombre premier et dans lequel, par conséquent, il n'y a qu'une base première.

2e genre : dans lequel la base admet plusieurs facteurs premiers, ce qui revient à dire qu'il y a plusieurs bases premières.

Dans tout système du premier genre, si l'on divise un nombre quelconque par des puissances croissantes de la base première, on obtient indéfiniment des expressions très simples et d'un calcul très aisé, puisque le nombre des chiffres significatifs n'augmente pas avec l'accroissement des puissances.

Dans un système du second genre, si l'on divise un nombre par des puissances croissantes de l'une des bases premières, on arrive à des expressions qui se compliquent de plus en plus, avec l'accroissement des puissances.

II
Importance relative des bases premières

En soi, l'un de ces genres n'est pas préférable à l'autre. Ce qui fait la supériorité d'un système de numération c'est l'usage plus ou moins fréquent des bases premières qu'il comporte. Le système du premier genre dont la base serait onze serait fort mauvais, attendu que la division par onze étant d'un usage extrêmement restreint, il importe fort peu de pouvoir diviser indéfiniment par onze. Mauvais aussi seraient les systèmes du second genre dont les bases seraient quatorze et quinze, attendu que si les facteurs deux et trois sont utiles les facteurs cinq et sept sont assez rarement employés.

Au contraire, les systèmes de bases huit et douze, qui appartiennent à des genres différents sont tous deux excellents et bien préférables au système décimal, car le facteur deux du premier, les facteurs deux et trois du second sont d'un bien plus fréquent usage que le facteur cinq.

Généralement, pour apprécier la valeur d'un système de numération, il faut se rendre compte de l'usage plus ou moins fréquent des facteurs premiers de sa base. Or il suffit du plus rapide examen pour se convaincre que les facteurs premiers deux et trois l'emportent, à ce point de vue, sur tous les autres, et que, de ces deux nombres, le facteur deux est le plus usité et, par conséquent, le plus important.

Le nombre trois, il est vrai, représente le triangle, la plus simple des figures planes, et l'élément de toutes les autres. Toutefois, son emploi est certainement moins fréquent que l'emploi du facteur deux. La considération des normales, des tangentes, des axes, introduit continuellement le facteur deux dans les calculs.

On peut dire que ce nombre, en raison de son importance, occupe une place exceptionnelle dans la série des nombres. Presque tous les objets créés par la nature ou formés par l'industrie humaine se divisent en deux parties symétriques ou homologues. Ce nombre régit jusqu'aux lois de notre entendement. C'est toujours en comparant deux à deux des objets, des quantités, des idées, que nous nous élevons à la connaissance d'une troisième quantité ou d'une troisième idée, puis d'une série indéfinie de quantités ou d'idées. C'est seulement de cette manière que notre esprit peut agir.

La petite expérience suivante peut servir à faire apprécier l'importance relative des facteurs 2, 3 et 5 :

Proposez-vous de diviser la ligne que voici en vingt cinq parties égales, sans employer le compas, simplement à vue, en marquant les divisions avec une pointe de crayon. Le problème consiste à diviser, à vue, cette ligne en cinq parties, puis à diviser encore une fois par cinq, chacune de ces parties.

Proposez-vous maintenant de diviser, à vue, la ligne suivante en vingt sept parties. Cela revient à effectuer successivement et à vue, trois divisions par trois.

Proposez-vous, enfin, de diviser la troisième ligne ci-après en trente-deux parties, ce qui revient à diviser cinq fois par deux :

Ces opérations faites, si vous appliquez un double décimètre sur les divisions approximatives ainsi formées, vous constaterez qu'elles sont beaucoup plus régulières, beaucoup plus près de l'exactitude dans la troisième ligne que dans les deux autres. Et cependant, dans le troisième cas vous aviez à diviser une ligne plus longue en un plus grand nombre de parties. Mais la facilité de la division par deux, non seulement a rétabli la balance, mais l'a fait grandement pencher du côté de la troisième expérience.

Que l'on ne croie pas qu'il n'y ait là qu'un essai amusant. Les personnes que leurs travaux habituels appellent à mesurer des quantités et à se servir d'instruments de mathématiques, savent que, fréquemment, sur des limbes, sur des échelles, sur des règles à calcul, il faut apprécier, à vue, des subdivisions que l'instrument ne donne pas. Or, il est très aisé et très exact d'évaluer la moitié, le quart, le huitième d'une longueur; beaucoup moins exact d'en évaluer le tiers et le neuvième; impossible d'en évaluer le cinquième avec quelque précision. Tout le monde sait, en outre, que dans les arts, dans l'industrie, dans la pratique de tous les métiers, la division par deux est continuelle. Sans insister davantage sur ce sujet, on conçoit combien il importe que le système de numération en rigueur se plie à ces nécessités de mesure et de calcul et aux aptitudes spéciales de nos sens et de notre intelligence.

Il est donc certain que tout système de numération judicieusement choisi, doit renfermer la base première deux. Pour rechercher quel est le meilleur de tous, il reste donc à considérer si la base de ce système ne doit être qu'une puissance de deux, ou si elle doit, au facteur deux, joindre le facteur trois.

La question se réduit donc à considérer:

d'une part, les systèmes du premier genre ayant pour base: 2, 4, 8, 16, 32 etc.

et d'autre part, les systèmes du second genre ayant pour base 6, 12, 24 etc.

Plus la base est faible, plus les calculs sont faciles, mais plus ils sont longs. Il ne faut que quelques minutes pour s'assimiler le mécanisme des calculs dans le système dont la base est deux, la plus faible possible. Mais nous avons vu que l'un des premiers nombres de l'échelle arithmétique, seize, est déjà représenté par l'unité suivie de quatre zéros.

Au contraire, plus la base est forte, et plus les calculs sont rapides, car les nombres sont condensés en un petit nombre de caractères. Mais aussi, il devient plus difficile d'acquérir la pratique du calcul, car il faut apprendre à chiffrer avec des signes plus nombreux.

Dans le choix d'une base il y a donc une certaine mesure à garder. Il faut qu'elle soit assez forte pour que les nombres les plus usuellement employés soient exprimés avec concision. Il ne faut pas qu'elle soit tellement forte que l'effort de mémoire à faire pour apprendre les tables d'addition, de soustraction et de multiplication excède la portée ordinaire des intelligences.

Or, l'expérience nous apprend que le système décimal, avec ses dix caractères est très aisément accessible aux esprits les moins cultivés. Si l'on devait changer la base dix, c'est donc au dessus et non au-dessous, qu'il faudrait chercher la base nouvelle.

Ces considérations nous amènent à admettre comme les meilleurs systèmes de numération :

Dans le premier genre, le système sédécimal, dont la base est seize et qui comporte seize caractères.

Dans le second genre, le système duodécimal dont la base est douze et qui comporte douze caractères.

Je vais donner l'exposé succinct de ces deux systèmes.

III.
Exposé du système sédécimal

—

La langue française présentant une exception grammaticale pour les nombres qui suivent neuf, nous n'aurons pas besoin d'inventer de nouvelles appellations pour les six nombres compris entre neuf et la nouvelle base. Mais il nous faut six nouveaux caractères. Je propose ceux que l'on va voir, et qui ne sont peut-être pas les meilleurs que l'on puisse imaginer, mais qui présentent cet avantage de se graver très aisément dans la mémoire.

Tableau des unités.

—

1 -- un	5 -- cinq	9 -- neuf	Ƹ -- treize
2 -- deux	6 -- six	Φ -- dix	Ŧ -- quatorze
3 -- trois	7 -- sept	# -- onze	£ -- quinze
4 -- quatre	8 -- huit	Ƭ -- douze	10 { seize ou unante

Tableau des seizaines ou unantaines

10 { seize ou unante	50, cinquante	90, nonante	Ƹ0, treizante
20 -- duante	60, soixante	ɸ0, dixante	+0, quatorzante
30 -- trente	70, septante	#0, onzante	£0, quinzante
40 - quarante	80, octante	Ƃ0, douzante	100, Cent

Puissances de 10

$16^2 = 256$, s'écrit en système sédécimal 100

$16^3 = 4096$, - - - - - - - - - - - - 1000

et s'appelle mille

$16^4 = 65.536$ s'écrit - - - 10.000

je l'appellerai sémille

$16^5 = 1.048.576$ s'écrit - - - 100.000

je l'appellerai centmille

$16^6 = 16.777.216$ s'écrit - - - 1.000.000

et s'appelle million

$16^7 = 268.435.456$ s'écrit 10.000.000

je l'appellerai sémillion

$16^8 = 4.294.967.296$ s'écrit - - - 100.000.000

je l'appellerai centmillion

$16^9 = 68.719.476.736$ s'écrit : 1.000.000.000

$16^{10} = 1.099.511.627.776$ - 10.000.000.000

$16^{11} = 17.592.186.044.416$ - - - 100.000.000.000

$16^{12} = 281.474.976.710.656$ - - - 1.000.000.000.000

$16^{13} = 4.503.599.627.370.496$ - - - 10.000.000.000.000

$16^{14} = 72.057.594.037.927.936$ - - - 100.000.000.000.000

$16^{15} = 1.152.921.504.606.846.976$ - - 1.000.000.000.000.000

$16^{16} = 18.446.744.073.709.551.616$ - - 10.000.000.000.000.000

Table de multiplication Sédécimale

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Φ	#	ƨ	ξ	ϯ	Ꮭ	10
2	4	6	8	Φ	ƨ	ϯ	10	12	14	16	18	1Φ	1ƨ	1ϯ	20
3	6	9	ƨ	Ꮭ	12	15	18	1#	1ϯ	21	24	27	2Φ	2ξ	30
4	8	ƨ	10	14	18	1ƨ	20	24	28	2ƨ	30	34	38	3ƨ	40
5	Φ	Ꮭ	14	19	1ϯ	23	28	2ξ	32	37	3ƨ	41	46	4#	50
6	ƨ	12	18	1ϯ	24	2Φ	30	36	3ƨ	42	48	4ϯ	54	5Φ	60
7	ϯ	15	1ƨ	23	2Φ	31	38	3Ꮭ	46	4ξ	54	5#	62	69	70
8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78	80
9	12	1#	24	2ξ	36	3Ꮭ	48	51	5Φ	63	6ƨ	75	7ϯ	87	90
Φ	14	1ϯ	28	32	3ƨ	46	50	5Φ	64	6ϯ	78	82	8ƨ	96	Φ0
#	16	21	2ƨ	37	42	4ξ	58	63	6ϯ	79	84	8Ꮭ	9Φ	Φ5	#0
ƨ	18	24	30	3ƨ	48	54	60	6ƨ	78	84	90	9ƨ	Φ8	#4	ƨ0
ξ	1Φ	27	34	41	4ϯ	5#	68	75	82	8Ꮭ	9ƨ	Φ9	#6	ƨ3	ξ0
ϯ	1ƨ	2Φ	38	46	54	62	70	7ϯ	8ƨ	9Φ	Φ8	#6	ƨ4	ξ2	ϯ0
Ꮭ	1ϯ	2ξ	3ƨ	4#	5Φ	69	78	87	96	Φ5	#4	ƨ3	ξ2	ϯ1	Ꮭ0
10	20	30	40	50	60	70	80	90	Φ0	#0	ƨ0	ξ0	ϯ0	Ꮭ0	100

En ne tenant pas compte de la multiplication par 10 qui ne demande aucun effort de mémoire, la table de multiplication renferme :

Dans le système décimal : 36 produits
\- - - - - - - - - - - - duodécimal : 55 - - - -
\- - - - - - - - - - - - sédécimal : 105 - - - -

La table ci-dessus renferme donc soixante neuf produits de plus que la table correspondante du système décimal. C'est un inconvénient en ce qu'elle est plus difficile à apprendre. Mais une fois cette difficulté vaincue, ce plus grand nombre de produits constitue un très notable avantage, car les opérations arithmétiques deviennent plus rapides. Il résulte de l'expérience que j'en ai faite que l'avantage dépasse l'inconvénient, car en un mois d'exercice, environ, on arrive à posséder parfaitement la table de multiplication sédécimale. Néanmoins, la difficulté de se graver ces cent cinq produits dans la mémoire étant très réelle, il est bon d'employer des moyens mnémoniques que je vais indiquer en considérant comme des multiplicandes les chiffres de la première ligne horizontale de la table, et comme des multiplicateurs, ces mêmes chiffres contenus dans la première colonne de gauche.

Si l'on met à part la première et la dernière colonne, il y a dans la table quatorze multiplicandes que je vais passer en revue les uns après les autres:

Multiplicande 2. — La colonne présente deux séries: dans la première le produit n'a qu'un seul chiffre. Dans la deuxième le premier chiffre est 1; le second est égal à deux fois l'excès du multiplicateur sur 8.

—

M^{de} 3.– Trois séries limitées par les m^{trs} 6 et # qui donnent des produits dans lesquels la somme des deux chiffres est égale à 3.

Dans les deux dernières séries, si le m^{tr} est un multiple de cinq plus un la somme des deux chiffres est 3.

Si le m^{tr} est un multiple de cinq plus 2, la somme des deux chiffres est 6.

Si le m^{tr} est un multiple de 5 plus 3 la somme des deux chiffres est 9.

Si le m^{tr} est un multiple de 5 plus 4 la somme des deux chiffres est Ƶ.

Si le m^{tr} est un multiple de 5, la somme des deux chiffres est £.

—

M^{de} 4.– Les produits par 4, 8, Ƶ, divisent la colonne en 4 séries. Dans les 3 dernières le premier chiffre est égal au quart du m^{tr}. Si la division se fait exactement le second chiffre est 0. Si le reste est 1, le second chiffre est 4. Si le reste est 2 (c'est-à-dire si le m^{tr} est pair) le second chiffre est 8. Si le reste est 3 le second chiffre est Ƶ.

—

M^{de} 5.– Cinq séries déterminées par les m^{trs} 4, 7, Φ, Ɛ, où le premier chiffre du produit change augmentant chaque fois d'une unité.

Quant au second chiffre il est donné par cette loi:

Si le m^{tr} est un multiple de 3, plus un la somme des deux chiffres est 5.

S'il est un multiple de 3, plus 2, la somme des deux chiffres est Φ.

S'il est ~~un~~ multiple de 3, la somme des deux chiffres est £.

—

M^{de} 6.– Aux m^{trs} 3, 6, 9, τ, £, correspondent des produits dans lesquels la somme des deux chiffres est égale au m^{tr}. Le premier chiffre est le tiers du m^{tr}, le deuxième, double du premier.

Aux m^{trs} 6 et # la somme des deux chiffres du produit, reproduit le m^{de}.

On peut aussi tirer des moyens mnémoniques de considérations semblables à celles qui ont été exposées pour le facteur 3.

—

M^{de} 7.– Sept séries de deux nombres, sauf celle du milieu qui en a trois. Celle-ci est très aisée à retenir: le produit par 8 occupe le milieu de la trentaine, les produits par 7 et 9 en occupent les limites.

Remarquer aussi qu'aux m^{trs} 5, Φ, £, la somme des deux chiffres du produit équivaut au m^{tr} le premier étant les $\frac{2}{3}$ du second.

—

M^{de} 8.– Le premier chiffre d'un produit est égal à la moitié du multiplicateur. Le second est égal à 0 si la division se fait exactement, à 8 dans le cas contraire.

M^{de} 9. — Aux m^{trs} 2, 4, 6, 8, Φ, τ, ♄, correspondent des produits terminés par ces chiffres et dont le premier chiffre est la moitié de celui des unités. En outre, aux produits par 6 et ♯ la somme des deux chiffres est 9 par 3 et 6, et 6 et 3.

—

M^{de} Φ. — Aux m^{trs} 2, 5, 8, la somme des deux chiffres du produit donne 5 et le premier chiffre est 1, 3, 5. Aux m^{trs} 4, 7, Φ, Ɛ, cette somme est Φ et le premier chiffre est 2, 4, 6, 8. Aux m^{trs} 3, 6, 9, τ, £, cette somme est £ et le premier chiffre est 1, 3, 5, 7, 9. Aux m^{trs} ♯ et ♄ elle est 14 et le premier chiffre est 6 et 8.

Cette loi dérive des considérations exposées au m^{de} 5.

—

M^{de} ♯. — Cinq séries déterminées par les m^{trs} 4, 7, Φ, Ɛ, et dans lesquelles le premier chiffre croît d'unité en unité tandis que le second décroît de 5 en 5 unités.

Remarquer qu'aux m^{trs} 3, 6, 9, τ, £ correspondent des produits dans lesquels la somme des deux chiffres reproduit ces m^{trs} tandis que le premier est double du second

—

M^{de} τ. — Les produits par 4, 8, τ, divisent la colonne en 4 séries. Dans les 3 dernières le premier chiffre est les $\frac{3}{4}$ du m^{tre}. Si le reste de la division par 4 est 1 le second chiffre est Ɛ. Si ce reste est 2, le 2^{e} chiffre est 8. Si ce reste est 3 le deuxième chiffre est 4.

—

M^{de} Ɛ. — Trois séries qui se terminent aux produits par 5, Φ, L, qui dans la somme de leurs deux chiffres reproduisent le m^{tre}, le premier chiffre valant quatre fois le second.

Dans la première série le chiffre des seizaines est inférieur d'une unité au m^{tre} et le chiffre des unités égal à 1 + 3 fois la différence du m^{tre} à 5. Dans la deuxième le premier chiffre est égal au m^{tre} moins deux et le second égal à 2 plus trois fois la différence du m^{tre} à Φ. Dans la troisième le premier chiffre est égal au m^{tre} moins 3 et le second égal à 3 fois la différence du m^{tre} à 10.

—

M^{de} ϯ. — Deux séries. Dans la première le premier chiffre est inférieur d'une unité au m^{tre} et le second égal à ϯ moins deux fois la différence du m^{tre} à 8. Dans la deuxième le premier chiffre est inférieur de 2 unités au m^{tre} et celui des unités égal à 2 fois la différence du m^{tre} à 10.

—

Mode L. — Le premier chiffre est inférieur d'une unité au multiplicateur, et la somme des deux chiffres égale L.

—

En s'aidant de ces moyens mnémoniques et de quelques autres que chacun peut s'amuser à rechercher, on arrive assez rapidement à posséder la table de multiplication, et lorsqu'elle est parfaitement sue on recueille tout le bénéfice du calcul sédécimal qui est notablement plus rapide que le calcul décimal.

Il n'y a rien à remarquer touchant les deux premières opérations de l'arithmétique. Après quelques jours d'exercice on additionne et on soustrait avec une égale facilité dans tous les systèmes.

—

Transformation d'un nombre décimal en un nombre sédécimal, et réciproquement.

—

Pour transformer un nombre décimal en un nombre sédécimal, il faut diviser ce nombre par la plus haute puissance de seize qu'il puisse contenir. Le quotient est le chiffre des plus hautes unités sédécimales. On divise ensuite le reste par la puissance de seize dont l'exposant est inférieur d'une unité, ce qui donne le second chiffre, et ainsi de suite jusqu'à ce que, après avoir divisi enfin par seize on obtienne un reste qui est le chiffre des unités. Si, au cours de l'opération, on rencontre une division impossible, on porte un zéro au quotient, et on emploie la puissance de seize immédiatement inférieure.

Soit, par exemple, le nombre 457.098 à transformer en un nombre sédécimal. L'opération se dispose ainsi :

```
457.098 |65.536
         6
 63.882 |4096
         15
 22.922
  2442  |256
         9
   138  |16
    10   8
```


Ce nombre transcrit dans le système sédécimal se présente donc sous la forme :

6Ł98Φ.

Si l'on n'a pas calculé, au préalable, les puissances de seize, on peut opérer autrement, et diviser le nombre à transformer par 16 puis le quotient par 16, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on rencontre un quotient moindre que seize. Le dernier quotient et les restes de toutes ces divisions, pris en ordre inverse, représentent les chiffres successifs du nombre transformé :

```
457.098 |16
137      28568 |16
  90     125     1785 |16
  109    136      18    111 |16
   138    88      25     15   6
    10     8       9
```

Mais, lorsque l'on possède le tableau

des puissances de seize, le premier procédé est plus expéditif.

Pour passer d'un nombre sédécimal à un nombre décimal, il faut faire l'opération inverse. Soit, par exemple, le nombre 4Ƭ#2Σ à convertir en un nombre décimal.

Le nombre d'unités contenues dans ce nombre, exprimé selon la notation du système décimal est évidemment égal à : $15 + 2 \times 16 + 11 \times 256 + 12 \times 4096 + 4 \times 65536$. Cette somme sera le résultat cherché :

$$\begin{array}{r} 15 \\ 32 \\ 2816 \\ 49152 \\ 262144 \\ \hline 314159 \end{array}$$

Pour transformer une fraction décimale en fraction sédécimale, on l'écrit sous forme de fraction ordinaire et on transforme les deux termes. On obtient ainsi une fraction ordinaire sédécimale. Pour obtenir une fraction sédécimale il n'y a plus qu'à effectuer la division.

Soit, par exemple, à traduire en système sédécimal le rapport approché de la circonférence au diamètre.

Si nous prenons ce nombre avec sept figures nous transformerons comme il suit :

3,1415926	16777216	10000000	1.048576
	1		9
14638710	1048576	562816	65536
4152950	13		8
10072222	65536	38528	4096
3518622	15		9
241822	4096	1664	256
	5		6
37022	256	128	16
11422	14	0	8
118	16		
6	7		

Nous obtenons la fraction ordinaire :

$$\frac{1Ɛ£5476}{989680}$$

qui, si l'on fait la division, devient :

3,243£6Φ

Remarquons que ce nombre fractionnaire n'a que six sédécimales, tandis que le nombre originaire avait sept décimales. Malgré ce nombre inférieur de figures, la fraction sédécimale donne cependant une valeur plus approchée que la fraction décimale, comme on peut s'en assurer en opérant la transformation inverse. C'est là un des avantages du système sédécimal qui condense les nombres en moins de caractères, et amène ainsi, lorsque l'on est habitué à son mécanisme, une très réelle simplification des calculs.

Il y a un moyen de transformation plus expéditif que celui qui vient d'être exposé. Il consiste à imposer à la fraction décimale un des dénominateurs 16, 16^2, 16^3,

16^4, etc, selon l'approximation que l'on veut obtenir, puis à transformer les deux termes. Par cet artifice, le dénominateur devient nécessairement 10, 100, 1000 etc, et par conséquent la fraction devient sédécimale du premier coup.

Soit, par exemple, à transformer le nombre 2,718281828 5. Si je multiplie et que je divise ce nombre par 16^9, j'obtiens:

$$\frac{186798904878}{68719476736}$$

et, en transformant:

2,#77151624.

Inversement, pour transformer une fraction sédécimale en fraction décimale, il faut la supposer écrite sous forme de fraction ordinaire, transformer les deux termes, puis effectuer la division.

On pourrait aussi imposer à la fraction sédécimale un dénominateur qui soit une puissance de dix convenablement choisie, selon l'approximation voulue, et opérer comme ci-dessus.

Pour faciliter ces calculs je donne ci-après le tableau des seize premières puissances de dix transformées en système sédécimal :

Système décimal	Système sédécimal
—	—
10	Φ
100	64
1 000	3Ŧ8
10 000	2.710
100 000	18.6Φ0
1 000 000	£4.240
10 000 000	989.680
100 000 000	5.£5Ŧ.100
1 000 000 000	3#.9ΦꞆ.Φ00
10 000 000 000	254.0#Ŧ.400
100 000 000 000	1.748.76Ŧ.800
1 000 000 000 000	Ŧ.8Ƹ4.Φ51.000
10 000 000 000 000	91.84Ŧ.72Φ.000
100 000 000 000 000	5Φ£.310.7Φ4.000
1 000 000 000 000 000	3.8Ƹ7.ŦΦ4.Ꞇ68.000
10 000 000 000 000 000	23.86£.26£.Ꞇ10.000

IV.

Exposé du système duodécimal

Après les développements donnés à l'exposé du système sédécimal il me paraît inutile de répéter les mêmes théories en ce qui concerne le système duodécimal. Le lecteur a déjà prévu qu'il nous faut admettre deux caractères nouveaux. Nous les emprunterons au système précédent et nous adopterais :

Φ pour représenter dix
⧺ pour représenter onze.

10 s'appellera douze ou unante,
20 s'appellera duante,
et ainsi de suite.

Quant aux opérations à effectuer pour transformer un nombre du système décimal en système duodécimal, ou, plus généralement, d'un système quelconque en un autre système, après ce qui a été dit, elles ne doivent plus offrir aucune difficulté.

Je me bornerai donc à donner ici la table de multiplication duodécimale et les puissances de douze et de dix exprimées dans l'un et l'autre système.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Φ	⧺	10
2	4	6	8	Φ	10	12	14	16	18	1Φ	20
3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29	30
4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38	40
5	Φ	13	18	21	26	2⧺	34	39	42	47	50
6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56	60
7	12	19	24	2⧺	36	41	48	53	5Φ	65	70
8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74	80
9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83	90
Φ	18	26	34	42	50	5Φ	68	76	84	92	Φ0
⧺	1Φ	29	38	47	56	65	74	83	92	Φ1	⧺0
10	20	30	40	50	60	70	80	90	Φ0	⧺0	100

Puissances de douze.

Système décimal	Système duodécimal
$12^1 = 12$	10
$12^2 = 144$	100
$12^3 = 1728$	1.000
$12^4 = 20.736$	10.000
$12^5 = 248.832$	100.000
$12^6 = 2.985.984$	1.000.000
$12^7 = 35.831.808$	10.000.000
$12^8 = 429.981.696$	100.000.000
$12^9 = 5.159.780.352$	1.000.000.000
$12^{10} = 61.917.364.224$	10.000.000.000
$12^{11} = 743.008.370.688$	100.000.000.000
$12^{12} = 8.916.100.448.256$	1.000.000.000.000

Puissances de dix

Système décimal	Système duodécimal
10	ϕ
100	84
1000	6#4
10.000	5.954
100.000	49.ϕ54
1.000.000	402.854
10.000.000	3.423.054
100.000.000	29.5ϕ6.454
1.000.000.000	23ϕ.ϕ93.854
10.000.000.000	1.#30.#91.054
100.000.000.000	17.469.96ϕ.454
1.000.000.000.000	141.981.#87.854

Je laisserai au lecteur le soin de rechercher les relations qui existent entre les produits et leurs facteurs. Elles sont analogues à celles que j'ai signalées dans la table sédécimale, mais moins utiles, la table duodécimale étant beaucoup plus facile à retenir. En effet, si l'on met à part les produits terminés par zéro qui s'apprennent très aisément, on obtient exactement le nombre des produits contenus dans la table de multiplication décimale. Comme les produits terminés par zéro, dans cette dernière, ne sont qu'au nombre de quatre, la table duodécimale n'est pas sensiblement plus difficile à apprendre, bien qu'elle soit beaucoup plus étendue.

V.

Comparaison des trois systèmes: Décimal — Duodécimal — Sédécimal.

Si dans les trois systèmes nous divisons l'unité par 2, 3, et 5, nous obtenons:

Pour le système décimal:

Division par 2	Division par 3	Division par 5
1	1	1
0,5	0,3333......	0,2
0,25	Incommensurable	0,04
0,125		0,008
0,0625		0,0016
etc		etc

Pour le système duodécimal

Division par 2	Division par 3	Division par 5
1	1	1
0,6	0,4	0,249724972...
0,3	0,14	....
0,16	0,054	Incommensurable
0,09	0,0194	
0,046	0,00714	
0,023	0,002452	
0,0116	0,0009594	
etc	etc.	

Pour le système sédécimal

Division par 2	Division par 3	Division par 5
1	1	1
0,8	0,555.......	0,333....
0,4	Incommensurable	Incommensurable
0,2		
0,1		
0,08		
0,04		
0,02		
etc		

Entre le système sédécimal et le système duodécimal, on trouve donc:

Supériorité du premier pour le facteur 2,
Infériorité pour le facteur 3,
Egalité pour le facteur 5.
Et en faisant la même comparaison

avec le système décimal, on trouve :

Supériorité du système sédécimal pour le facteur 2.

Egalité pour le facteur 3.

Infériorité pour le facteur 5.

En se reportant à ce qui a été dit plus haut de l'importance relative des divers facteurs premiers, on serait donc amené à conclure que le meilleur des trois systèmes comparés et, par conséquent, de tous les systèmes possibles, est le système sédécimal.

Cette conclusion serait toutefois prématurée. Avant de trancher la question il y a lieu de l'examiner sous d'autres points de vue.

—

Les mesures dans les trois systèmes.

—

On dit qu'une mesure de longueur, de poids, de capacité, de monnaies, est décimale, duodécimale, sédécimale, lorsque elle est exprimée par un seul chiffre significatif et que ce chiffre est un diviseur de la base du système.

Les mesures de surface et de volume sont décimales, duodécimales, sédécimales, lorsque la longueur de leur côté possède ce caractère.

Seront par conséquent décimales les mesures exprimées par les nombres :

1 , 2 , 5 , 10 ,

et par les multiples et sous-multiples dicimaux de ces nombres.

Seront également décimales, en ce qui concerne les surfaces et les volumes, les mesures exprimées par les carrés et les cubes de ces nombres.

Seront duodécimales les mesures exprimées par les nombres:

1, 2, 3, 4, 6, 10

et par leurs multiples et sous multiples duodécimaux.

Seront sedécimales les mesures exprimées par les nombres:

1, 2, 4, 8, 10.

On voit que l'échelle duodécimale est celle qui présente le plus de diviseurs, et que l'échelle décimale est celle qui en présente le moins.

De là résultent les défauts du système décimal, défauts qui sont dissimulés par l'habitude que nous avons de calculer dans ce seul système, mais que l'on aperçoit très nettement aussitôt que l'on y fait attention.

C'est ainsi que, en topographie, on est trop fréquemment obligé d'admettre des échelles incommodes telles que le $\frac{1}{1250}$e, le $\frac{1}{2500}$e, le $\frac{1}{4000}$e etc. Dans la carte de France au $\frac{1}{80.000}$e le Kilomètre est représenté par une longueur de douze millimètres et demie, nombre qui ne permet pas une rapide évaluation des distances. Cependant le $\frac{1}{20.000}$e est décimal, mais le $\frac{1}{40.000}$e et le

$\frac{1}{80.000}$e ne le sont plus. Il faut, si l'on veut conserver le caractère décimal, sauter du $\frac{1}{20.000}$e au $\frac{1}{50.000}$e et au $\frac{1}{100.000}$e.

Dans les monnaies, dans les poids, les mêmes inconvénients se remarquent. La division du demi décime en cinq centimes est fort incommode et a fait imaginer ce que l'on appelle, en comptabilité, l'expédient des forts centimes: on paie quinze centimes au lieu de treize ou quatorze, et dix, au lieu de onze ou douze. Les pièces de cinquante francs, de cinq francs, de cinquante centimes ne peuvent avoir leur moitié, non plus que les poids de cinquante et de cinq Kilogrammes, non plus que la mesure de cinq litres.

Dans toute l'étendue du système décimal des poids et mesures, ce hiatus entre le facteur 2 et le facteur 5 se fait sentir.

Le système duodécimal évite ces inconvénients puisque ses bases premières 2 et 3, fournissent trois diviseurs consécutifs, 2, 3 et 4. Ainsi les pièces de 1, 2, 3, 4, et 6 francs seraient duodécimales, ainsi que les échelles topographiques du $\frac{1}{1000}$e, $\frac{1}{2.000}$e, $\frac{1}{3.000}$e, $\frac{1}{4.000}$e, $\frac{1}{6.000}$e.

Le système sédécimal présente un diviseur de moins. C'est une infériorité très réelle et qu'il convient de remarquer. Il la rachète par d'autres avantages, résultant de l'étendue et de la régularité de son échelle numérique. Avec les cinq pièces sédécimales de 1, 2, 4, 8 et 10 francs, on peut payer toutes les sommes entières de 1 à 1£ francs (31 décim.), tandis qu'avec les six pièces duodécimales de 1, 2, 3, 4, 6 et 10 francs, on ne peut payer que 24 francs (28 dec.). Avec une série de neuf poids sédécimaux représentés par les nombres:

$$10, 8, 4, 2, 1; \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10},$$

on pourrait effectuer 1££ pesées différentes et consécutives (511 dec.).

Tandis qu'avec les onze poids duodécimaux:

$$10, 6, 4, 3, 2, 1; \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}$$

on ne pourrait en effectuer que 254 (352 dec.).

Les mesures duodécimales de surface et de volume sont plus nombreuses que leurs analogues du système sédécimale, mais leur expression numérique est moins simple, comme on le voit ici:

Carrés duodécimaux:

100 — 30 — 14 — 9 — 4 — 1

0,30 — 0,14 — 0,09 — 0,04 — 0,01

etc.

Carrés sédécimaux:

100 — 40 — 10 — 4 — 1

0,40 — 0,10 — 0,04 — 0,01

etc.

Cubes duodécimaux:

1000 — 160 — 54 — 23 — 8 — 1

0,160 — 0,054 — 0,023 — 0,008 — 0,001

etc.

Cubes sédécimaux :

1000 — 200 — 40 — 8 — 1

0,200 — 0,040 — 0,008 — 0,001

etc.

—

Division du cercle

—

Si l'on fait, en numération duodécimale, l'angle droit égal à l'unité, ou mieux, égal à 100 grades (144 décim.) on obtient pour les angles au centre correspondant aux côtés des principaux polygones réguliers, les valeurs suivantes :

Angle correspondant au côté du triangle équilatéral :		140 grades
— — — — — —	Carré	100
— — — — — —	Exagone	80
— — — —	Octogone	50
— — —	Dodécagone	40

etc. etc.

On voit que le système duodécimal exprime par des valeurs très simples les angles les plus usuellement employés, ceux dont les lignes trigonométriques ont des propriétés particulières, et qui dérivent du triangle équilatéral et du carré, les plus importantes des figures rectilignes.

Le système décimal donne l'angle du carré, mais non celui du triangle équilatéral qu'il remplace par le pentagone.

Le système sédécimal, dans l'hypothèse de l'angle droit pris pour unité, est, à ce point de vue, inférieur aux deux autres, car il ne donne que l'angle droit et ses dérivés.

Mais cette infériorité peut disparaître si l'on fait attention qu'aux trois quarts de son échelle numérique il présente le nombre douze, ce qui peut lui donner tous les avantages du système duodécimal sans lui faire perdre les siens propres. Il suffit, pour obtenir ce résultat, de choisir judicieusement l'unité première, et de faire l'angle du triangle équilatéral égal à l'unité, ou mieux, égal à 100.

Or, il n'y a pas moins de raisons de prendre cet angle pour unité que l'angle droit, car on considère presque toujours un angle comme faisant partie d'un triangle, et ainsi les trois angles d'un triangle donnent une somme égale à 3, ce qui est au moins aussi logique que de la faire égale à 2.

Dans cette hypothèse nous obtiendrons les nombres sidécimaux suivants:

Circonférence entière :	600 grades
Demie circonférence :	300 ...
Angle correspondant au côté du triangle équilatéral :	200 ...
- - - - - - du Carré :	150 ...
. . . . . . de l'Exagone :	100 ...
. . . . de l'Octogone :	70 ...
du Dodécagone :	50 ...

etc. etc.

Si l'on faisait la même hypothèse en système duodécimal on obtiendrait :

Circonférence entière : — — 600 grades
Demie circonférence — — 300 ...
Angle correspondant au côté du triangle équilatéral : 200 ...
. . . . du carré : 160 ...
. . . . . . de l'exagone : 100 ...
. . . . . de l'octogone : 90 ...
. . . . . du dodécagone : 60 .
etc etc.

Il peut être intéressant d'exposer ce que serait le mètre sédécimal et le mètre duodécimal comparativement au mètre actuel, et en supposant le quart du méridien égal à 10.002.000 mètres, nombre qui paraît résulter des mesures les plus récentes. Il est bien entendu que les nombres qui suivent sont décimaux :

Système sédécimal

1ère hypothèse : L'angle droit divisé en 100^g (256 déc.) :

Semille mètres sédécimaux = 39.070^m, 31
Mille . . . . . . — = 2.441, 894
Cent . . . . . = 152, 6184
Unante . . . . . = 9, 53865
Le mètre sédécimal = 0^m, 596165
Sa unantième partie = 0, 03726
Sa centième partie = 0, 0029288
Sa millième partie = 0, 0001455

2e hypothèse : L'angle droit égal à 180^G
(384 en système décimal)

—

Seize mille mètres sédécimaux = 26.046,9 m.
Mille — — = 1627,93
Cent - - — = 101,745
Unante - - - = 6,3591
Le mètre sédécimal - = 0,397444
La unantième partie = 0,024840
La centième partie sédécimale = 0,0015525
La millième partie sédécimale = 0,000097032

On voit que dans cette dernière hypothèse, la plus avantageuse, le mètre sédécimal se rapproche beaucoup de l'ancien pied. Ses dimensions et celles de ses multiples et sous multiples seraient fort commodes.

—

Système duodécimal

—

1ère hypothèse : l'angle droit égal à 100^G (144 déc.)

—

Douze mille mètres duodécimaux = 5788,19 m
Mille - - - - — — = 482,35
Cent - - — = 40,1958
Unante - - — = 3,34965
Le mètre duodécimal = 0,279138
La unantième partie = 0,0232614
La centième partie = 0,0019384
La millième partie = 0,00016154

—

2e hypothèse : l'angle droit égal à 160^{g} (216 déc.)

Cent mille mètres duodécimaux	46 305,50
Douze mille — — — —	3 858,80
Mille — — — — — —	321,567
Cent — — — — — — —	26,7972
Unante — — — — — —	2.2331
Le mètre duodécimal	0,186091
Sa unantième partie — —	0,0155075
Sa centième partie — —	0,0012923
Sa millième partie — — —	0,00010769

—

Dans ces hypothèses et surtout dans la dernière, le mètre est trop petit. Il y aurait lieu de le multiplier par l'un des diviseurs de la base : 2, 3, 4 ou 6, ce qui d'ailleurs n'offrirait aucun inconvénient.

—

La division du temps étant dès à présent duodécimale, il est clair que le système duodécimal s'adapterait fort aisément aux heures actuelles. Mais il est curieux de constater que le système sidécimal s'y adapterait non moins bien, et ne modifierait presque pas les cadrans de nos horloges.

Le jour étant divisé en 18 heures (24 déc.) et la circonférence comprenant 600 divisions (1536 déc.) chaque heure équivaut à 40 de ces divisions (64 déc.). La unantième partie de l'heure équivaut donc à quatre divisions du cercle, et, par conséquent, chacune des subdivisions du cadran ci-contre correspond à une division du cercle. Si on appelait cette division minute, une minute de temps correspondrait à une minute d'angle. Cette minute est d'ailleurs très voisine de la minute actuelle puisque une heure en contient soixante quatre au lieu de soixante.

Il serait toutefois préférable, si jamais la numération sédécimale venait à être appliquée, de diviser le jour en seize heures.

—

Jusqu'à présent, la comparaison que nous avons poursuivie entre le système duodécimal et le système sédécimal n'a donné une prééminence marquée ni à l'un ni à l'autre. Ils ont, l'un et l'autre, leurs avantages propres qui se balancent à peu près, et je pense que l'impression qui résulte pour le lecteur des considérations précédentes, c'est l'embarras du choix. Il n'en sera pas de même dans le chapitre qui nous reste à traiter et qui va faire décidément pencher la balance en faveur de la numération sédécimale.

VI.

Les logarithmes dans le système duodécimal et dans le système sédécimal.

—

Les logarithmes dans le système duodécimal, non plus que dans aucun système de numération du second genre, ne peuvent avoir rien de particulier. Leurs propriétés, leur calcul, leur emploi, sont identiquement les mêmes que dans le système décimal.

Voici, avec sept figures les logarithmes duodécimaux des douze premiers nombres :

1	0
2	0,34201#2
3	0,537#818
4	0,68403Φ4
5	0,79324Φ5
6	0,879#Φ0Φ
7	0,9492239
8	0,Φ060596
9	0,Φ73#434
Φ	0,#152697
#	0,#6#5ΦΦ#
10	1

Les logarithmes vulgaires du système sédécimal présentent, au contraire des propriétés fort remarquables et qui seraient de la plus grande utilité si la numération sédécimale était employée.

Voici les logarithmes de la première unantaine :

1	0
2	0,4
3	0,6570069
4	0,8
5	0,949Φ784
6	0,Φ570069
7	0,#3Φ##40
8	0,Ƶ
9	0,ƵΦɟ00Ɛ2
Φ	0,Ɛ49Φ784
#	0,ƐƐ6753ɟ
Ƶ	0,ɟ570069
Ɛ	0,ɟƵƐ4012
ɟ	0,£3Φ##40
£	0,£Φ0Φ7ɟƐ
10	1

On voit que les puissances entières de la base première du système ont pour logarithmes des quantités finies qui, abstraction faite de la caractéristique, ne peuvent affecter que les formes suivantes :

0 ; 0,4 ; 0,8 ; 0,Ƶ.

Il en résulte que tout nombre qui est le double, le quadruple, l'octuple ; ou bien, la moitié, le quart, le huitième d'un autre nombre a le même logarithme à la première figure près. Ainsi:

$$\left.\begin{array}{l} \log \frac{3}{10} = \bar{1},6 \\ \log \frac{3}{8} = \bar{1},\Phi \\ \log \frac{3}{4} = \bar{1},4 \\ \log \frac{3}{2} = 0,2 \\ \log 3 = 0,6 \\ \log 3\times 2 = 0,\Phi \\ \log 3\times 4 = 0,4 \\ \log 3\times 8 = 1,2 \\ \log 3\times 10 = 1,6 \end{array}\right\} 5700692$$

Cette propriété est de la plus haute importance, attendu qu'elle permet, comme nous le verrons tout à l'heure, d'établir des tables très étendues et très précises réduites en un très petit volume. Bornons-nous à remarquer, en ce moment, que les logarithmes des nombres fractionnaires compris entre 1 et 2, répondent, à la première figure près, aux logarithmes de tous les nombres possibles. Cette première figure, qui seule est variable, constitue ce que j'appellerai la seconde caractéristique du logarithme.

Si l'on forme les puissances sous-doubles de la base première et que l'on en prenne les logarithmes, on obtient:

$$\begin{array}{l} \log 2^{0,8} = 0,2 \\ \log 2^{0,4} = 0,1 \\ \log 2^{0,2} = 0,08 \\ \log 2^{0,1} = 0,04 \\ \log 2^{0,08} = 0,02 \end{array}$$

$$\log 2^{0,04} = 0,01$$
$$\log 2^{0,02} = 0,008$$
etc.

D'où il appert, – ce qu'il eût été facile d'établir a priori – que le logarithme d'une puissance entière ou fractionnaire de 2 est égal au quart de l'exposant de cette puissance.

Si donc on représente par α un infiniment petit quelconque, le module des logarithmes sédécimaux sera donné par la formule :

$$M = \frac{\alpha}{2^{4\alpha} - 1}$$

Pour obtenir M avec seize figures exactes, au moins, il convient d'employer les nombres suivants :

$$M = \frac{0,0000.0000.0000.0000.4}{2^{0,0000.0000.0000.0001} - 1}$$

On trouve, en effectuant les calculs :

M = 0,5ƶ55.1Ɛ94.Φ70#.£8Φ9.3

avec autant d'approximation qu'en donneraient vingt figures dans le système décimal.

Le nombre $2^{0,0000.0000.0000.0001}$ est égal à :

1,0000.0000.0000.0000.#172.17£7.Ɛ1ƶ£.791#...

La base des logarithmes Népériens serait donnée par la formule :

$$b = 1,0000.0\,\ldots\ldots\,1^{\,1,0000.0\,\ldots}$$

l'exposant de la puissance étant du degré correspondant au rang qu'occupe la seconde unité dans le nombre.

En se bornant à huit figures, on aurait :

$$b = 1,0000.0001 \quad ^{1.0000.0000}$$

Il est d'ailleurs parfaitement inutile d'effectuer les calculs assez longs qui permettraient de trouver ce nombre. Il est connu en numération décimale. Il suffit donc de le transformer, comme nous l'avons fait ci-dessus, page 1ɸ.

Maintenant que nous connaissons quelques unes des propriétés fondamentales des logarithmes sédécimaux, nous pouvons appliquer ces propriétés à la construction des tables.

Supposons qu'il s'agisse d'établir des tables de peu d'étendue à 4 ou 5 décimales, analogues à celles de Lalande. On pourra les disposer de la manière suivante :

Nombres				Log. 2e c.	M.	Dif.
8	4	2	1	ɛ.8.4.0	000	
18	ɛ	6	3	2.7.ɸ.6	570	
28	14	ɸ	5	5.1.ɛ.9	490	
38	1ɛ	7	7	7.3.5.#	3ɸɛ+	

etc.

Pour chercher un nombre dans cette table il suffit de se rappeler que tout nombre divisible par 8, c'est à dire terminé par 8 se trouve dans la première colonne des nombres ; que tout nombre divisible par 4 c'est à dire terminé par 4 ou 8 se trouve dans la deuxième ; que tout nombre pair différent de ces premiers, c'est à dire simplement divisible par 2 (terminé par 2, 6, 0, 4) se trouve dans le troisième ; et enfin que tout nombre impair se trouve dans la quatrième.

Par cette disposition, la table renferme moitié moins de lignes qu'elle n'en occuperait si tous les nombres étaient rangés dans une seule colonne. En outre les recherches deviennent plus faciles et plus rapides à cause du classement des nombres par catégories et de leur réunion en un moindre espace.

Si l'on veut que les nombres croissent d'unité en unité, la première colonne s'arrêtera au $\frac{1}{8}$e de l'étendue de la table, la 2e au $\frac{1}{4}$, la 3e à la $\frac{1}{2}$e.

Quant aux différences D, aussitôt que l'on pourra les considérer comme croissant proportionnellement aux nombres dans la quatrième colonne, on pourra à plus forte raison admettre cette hypothèse dans les autres colonnes, puisque, dans la 1re ces différences sont $\frac{D}{8}$; dans la 2e, $\frac{D}{4}$; et dans la 3e, $\frac{D}{2}$.

La table n'aura donc d'autre limite que l'approximation même des logarithmes, c'est à dire qu'elle sera arrivée à sa limite lorsque les nombres de la 4e colonne étant multipliés par 10, une unité ajoutée n'aura plus d'influence sur le dernière figure du logarithme.

Une telle disposition n'est applicable qu'à des tables restreintes. Pour établir des tables analogues à celles de Callet et de Dupuis, à six sédécimales (car six sédécimales correspondent à sept décimales), il est clair que l'on pourrait adopter le modèle usité et en quelque sorte classique de la table à double entrée qu'ont adopté ces auteurs et tous les calculateurs de tables de logarithmes. Mais en copiant ce modèle on n'utiliserait pas cette propriété précieuse des logarithmes sédécimaux d'avoir deux caractéristiques, et la numération sédécimale perdrait ses avantages.

Il est une autre disposition bien autrement avantageuse pour de grandes tables, et qui deviendrait même la seule possible si l'on voulait établir des tables extrêmement étendues et précises, ayant, par exemple dix sédécimales, qui équivalent à douze décimales.

Je vais indiquer cette disposition. Toutefois, comme il s'agit d'une simple démonstration, et non d'une application, je me proposerai seulement, afin d'éviter des calculs inutiles, d'établir les premières lignes d'une table à dix sédécimales.

Pour cela je calcule avec six figures les onze premières puissances sous-doubles de 2, et j'obtiens le tableau que voici:

a — $2 = 2,000000$ — log. $= 0,4$
b — $\sqrt[2]{2} = 1,6ϕ0976$ — log. $= 0,2$
c — $\sqrt[4]{2} = 1,306Σ71$ — log. $= 0,1$
d — $\sqrt[8]{2} = 1,172\#84$ — log. $= 0,08$
e — $\sqrt[10]{2} = 1,0\#5586$ — log. $= 0,04$
f — $\sqrt[20]{2} = 1,059\#0ξ$ — log $= 0,02$
g — $\sqrt[40]{2} = 1,02Ƶ9ϕ4$ — log $= 0,01$
h — $\sqrt[80]{2} = 1,0163ξϕ$ — log $= 0,008$
i — $\sqrt[100]{2} = 1,00\#1ϕΣ$ — log. $= 0,004$
j — $\sqrt[200]{2} = 1,0058Ƶ8$ — log $= 0,002$
k — $\sqrt[400]{2} = 1,002Ƶ60$ — log $= 0,001$
l — $\sqrt[800]{2} = 1,00162Σ$ — log $= 0,0008$

Le lecteur a déjà compris l'usage de ce tableau :

$$\log l = 0,0008$$
$$\log k = 0,0010$$
$$\log kl = 0,0018$$
$$\log j = 0,0020$$
$$\log jl = 0,0028$$
$$\log jk = 0,0030$$
$$\log jkl = 0,0038$$
$$\log i = 0,0040$$
$$\log il = 0,0048$$
$$\log ik = 0,0050$$

etc.

La différence entre l et k est 1631 ; la dernière différence entre k et j est 1634. Les nombres, dans l'approximation que comportent six figures, croissent donc proportionnellement aux logarithmes, et nous pourrons

Dresser une table dont je donne ici les premières lignes :

N.	d	L.	D. et p.p.			N.	d	L.	D. et p.p.		
100.000		0.000		3	4	101.ϕ6Ƹ		0.098		7	8
163	3	0.008	10 20	5Ƶ #8	5Ƶ #8	#[illegible]2	5	0.0ϕ0	10 20		
2Ƶ6	3	0.010	30 40	11,4 171	114 170	Ƹ38	6	0.0ϕ8	30 40		
42ϕ	4	0.018	50 60	1Ƶ[illegible] 229	1ƵƵ 228	79Ƹ	5	0.0#0	50 60		
58Ƹ	3	0.020	70 80	286 2ⱦ2	284 2ⱦ0	102.003	6	0.0#8	70 80		
6Ʃ1	4	0.028	90 ϕ0	33ⱦ 39#	33Ƶ 398	168	5	0.0Ƶ0	90 ϕ0		
854	3	0.030	#0 Ƶ0	3Ʃ7 454	3Ʃ4 451	2Ƶⱦ	6	0.0Ƶ8			
9#8	4	0.038	Ƹ0 ⱦ0	4#0 50Ƶ	4ϕƸ 509	434	6	0.0Ƹ0			
#1#	3	0.040	Ʃ0 100	569 5Ƶ5	565 5Ƶ1	59ϕ	6	0.0Ƹ8			
Ƶ7Ʃ	4	0.048		5	6	700	6	0.0ⱦ0			
Ƹⱦ3	4	0.050	10			867	7	0.0ⱦ8			
Ʃ48	5	0.058	20 30			9ƵƸ	6	0.0Ʃ0			
101.0ϕƵ	4	0.060	40 50			#34	7	0.0Ʃ8			
210	4	0.068				Ƶ9ϕ	6	0.100			
375	5	0.070				...		...			
4Ƹϕ	5	0.078				...		...			
63ⱦ	4	0.080				etc		etc	etc		
7ϕ3	5	0.088									
908	5	0.090									
	5										

Dans cette table la première colonne est celle des nombres. Elle s'étend de 100.000 (1.048.576 déc.) à 200.000 (2.097.152 déc.). La deuxième colonne indique le dernier chiffre de la différence entre deux nombres consécutifs. Elle permet de voir d'un coup d'œil la différence proportionnelle qu'il convient de choisir pour les interpolations. La troisième colonne donne les quatre premières figures des logarithmes. Un point sépare la seconde caractéristique qui est variable. Abstraction faite de cette seconde caractéristique chaque logarithme répond à quatre nombres. Ces quatre nombres, on pourrait les écrire dans la table; mais la multiplication ~~et~~ la division par 2, 4, 8, sont des opérations si faciles en numération sédécimale que j'estime qu'il vaut mieux ne donner qu'une colonne de nombres. Enfin, dans la quatrième colonne on trouve les parties proportionnelles portant, en vedette, le dernier chiffre des différences numérales.

Soit à trouver le log. de 80ϕ97,Ɛτ.

J'opère comme il suit:

La huitième partie du nombre proposé	= 1015Ƨ,ħ8
le nombre de la table, approchant	= 1014Ɛϕ
différence:	55,ħ8
Je dis: pour 50, augmentation:	1ττ
pour 5 — —	1τ,τ
pour 0,ħ — —	3,Ƨ4
pour 0,8 — —	0,2ħ
Total:	14τ,[illegible]
log. de 1014Ɛϕ	= 0.07800
à ajouter:	14Ɛ
Total	0.0794Ɛ

et en rétablissant la première et la 2e caractéristique:

log 80ϕ97,Ɛτ = 4,τ0794Ɛ

Les parties proportionnelles sont calculées de manière à permettre d'obtenir, si l'on veut, sept sédécimales, car l'on voit que le log. du nombre proposé est, à une unité près du 7e ordre : 4,6079464.

Soit à trouver le nombre correspondant au logarithme : 2,80397Φ4.

Log. approchant : 0.038000 correspondant au nombre 100948

différence : 1744   41,47

Pour 171 — 40   Total : 1009Σ9,47

pour 5,6   1

pour 3,Σ7   0,4

pour 0,29   0,07

Total : 41,47

On obtient : 1009Σ9,47

et en rétablissant le nombre vrai par la considération des caractéristiques :

402,746Σ6.

Cette table, si elle était établie, serait beaucoup plus précise et beaucoup plus étendue que les tables usuelles du système décimal, celle de Dupuis, par exemple. Cette dernière occupe 182 page in 8° (nombre décimal). La table sédécimale dont je viens d'indiquer la construction pourrait tenir dans huit pages du même format. Si l'on ne jugeait pas nécessaire de lui donner un aussi petit volume, on pourrait pousser l'extraction des racines jusqu'à :

$$m = \sqrt[100]{2} \text{ dont le log. est } 0,0004.$$

Alors, elle occuperait un volume double, mais les opérations d'interpolation seraient simplifiées et plus exactes.

Pour établir des tables à 7 sédécimales, pouvant donner la huitième figure à une unité près du huitième ordre, il conviendrait de pousser l'extraction des racines, avec l'approximation convenable, jusqu'à $r = \sqrt[8000]{2}$ dont le logarithme est : 0,0000800. La table alors commencerait par le nombre 1.000.000.

Cette table occuperait 80 pages (128 dec.). Elle serait beaucoup plus exacte et beaucoup plus étendue que les grandes tables à huit décimales publiées par le ministère de la guerre pour les besoins de la Géodésie, et qui remplissent un énorme in quarto. La table à 7 ou 8 figures dont je viens d'indiquer la construction pourrait être imprimée en format in 12°. Elle formerait un petit volume de la forme d'un agenda que l'on pourrait mettre dans sa poche. Elle constituerait cependant l'instrument de calcul usuel le plus puissant et le plus commode dont la science puisse disposer.

En mettant à profit cette propriété importante des logarithmes sédécimaux de posséder deux caractéristiques, on établirait, d'après les mêmes principes, des tables à 9, à Φ sédécimales. Une table à Φ figures, par exemple, (qui équivalent à douze décimales) formerait un volume qui serait encore parfaitement portatif.

Il me semble qu'il serait inutile d'aller plus loin, et qu'une table à φ sédécimales répondrait aux desiderata les plus ambitieux de l'astronomie elle-même. Cependant, si une approximation plus serrée était jugée nécessaire, la numération sédécimale n'y faillirait pas. On pourrait établir des tables à Ƭ ou Ɛ figures, sans dépasser les dimensions d'un volume ordinaire. Or, établir des tables complètes à quinze figures dans le système décimal, ou même dans le système duodécimal serait une entreprise impossible, attendu qu'une table de cette étendue établie dans la forme usitée et donnant les logarithmes des nombres d'unité en unité, représenterait un nombre de volumes égal à une bibliothèque.

De tous les systèmes de numération admissibles, le système sédécimal est le seul qui se prête à de semblables combinaisons. A ce point de vue il est absolument incomparable. Il réalise, dans les calculs logarithmiques, l'extrême commodité et l'extrême exactitude. Il réalise aussi l'extrême simplicité, car nul autre système de numération ne pourrait fournir des expressions telles que celles-ci:

log. sin $\frac{1}{2}$ de l'angle droit $= \bar{1}$, ⺊

log. sin $\frac{1}{3}$ de l'angle droit $= \bar{1}$, Ƭ

log. cos $\frac{1}{3}$ de l'angle droit $= \bar{1}$, £2#80 avec une erreur égale à 3 millionnièmes.

$$\log \frac{3}{2,18} = 0,057$$

à moins d'une demie unité sédécimale du cinquième ordre.

Ces propriétés curieuses et si grandement utiles du système sédécimal sont celles du système binaire dont il n'est qu'une forme particulière. Rien n'est plus aisé que de passer de l'un à l'autre. Chaque chiffre sédécimal correspond à un nombre binaire de quatre caractères. Il suffit donc d'écrire les nombres binaires, correspondant aux chiffres sédécimaux, à la suite les uns des autres, et de combler les intervalles par des zéros. Ainsi le log. de £ se présente sous les formes suivantes dans les deux systèmes.

Sédécimal: 0, £ ϕ 0 ϕ 7 ƚ Ƹ 1 #

Binaire: 0, 1111.1010.0000.1010.0111.1110.1101.0001.1011.

Ces propriétés se retrouveraient, à la vérité, dans tous les systèmes de numération du premier genre, mais elles n'y auraient pas la même utilité parceque le nombre 2 est, tout à la fois, le plus usité de tous les nombres, le seul nombre premier qui soit pair, et la plus petite base première possible. La numération sédécimale conserve tous les avantages de la numération binaire, mais elle en évite les inconvénients qui résultent, ainsi que nous l'avons vu, de ce que le nombre 2 est, entant que base seconde, beaucoup trop faible.

VIII.
Conclusion.

Il résulte de cette étude, d'abord ce qui a été déjà établi, à savoir que les meilleurs systèmes de numération sont le système sédécimal et le système duodécimal.

Mais il me paraît en résulter aussi, que de ces deux systèmes, excellents tous les deux, c'est le premier qui devrait être préféré s'il pouvait être question de remplacer celui qui a prévalu dans l'usage général, sans que des raisons mathématiques aient déterminé ce choix.

Si l'on considère la base seconde du système sédécimal, son échelle numérique est étendue, et condense les nombres en des expressions aussi synthétiques que le permettent les nécessités du calcul et les aptitudes de la mémoire. Si l'on considère sa base première, cette échelle numérique est, au contraire, réduite au minimum d'amplitude, et la plus analytique qu'il soit possible d'imaginer, puisque elle est celle du système binaire. Cette échelle est d'ailleurs d'une régularité parfaite et présente les mêmes propriétés et les mêmes avantages dans l'infiniment grand et dans l'infiniment petit.

De là découlent les propriétés de la numération sédécimale, propriétés qui ne sont, en ce moment que curieuses et intéressantes au point de vue théorique, mais qui deviendraient, dans la pratique, d'une très grande utilité.

Je crois donc qu'il m'est permis de conclure des considérations exposées dans ce modeste essai, que le plus avantageux de tous les systèmes de numération est le système sidécimal.

A l'appui de mon opinion je puis invoquer l'autorité d'un philosophe et celle d'un souverain. Le philosophe est Leibnitz, qui fut aussi un grand géomètre, et qui pensait que la numération binaire est plus capable que toute autre de révéler les propriétés les plus mystérieuses des nombres. Le souverain est Charles XII de Suède. Voici, en effet ce que l'on lit dans l'histoire de ce prince par Voltaire : « Charles XII voulait » changer la manière de compter par dizaine » et proposait, à la place, le nombre 64, parce » que ce nombre contient à la fois un cube et » un carré, et qu'étant divisé par 2, il est, enfin réductible à l'unité. » Le roi Charles XII aimait les entreprises irréalisables. Il y parait à son histoire. Sa proposition n'est pas admissible. Il serait impossible d'imaginer soixante quatre caractères se distinguant nettement les uns des autres, et non moins impossible de graver, dans une mémoire d'homme, le nombre considérable de produits que donnerait la table de multiplication. Ce nombre serait:

$$63 \times 31 = 1953.$$

Mais le système de base 64 n'est, lui aussi, comme les systèmes de base 4, 8, 16, 32, etc, qu'une forme du système binaire. Il n'est donc pas différent, au fond, de ces systèmes, et se ramène, en particulier, au système sédécimal qui est celui qu'il convient de choisir dans cette série.

Nous assistons actuellement à un mouvement scientifique sans exemple dans l'histoire de l'humanité. Ce mouvement ne date que du seizième siècle, et quels prodigieux résultats n'a-t-il pas déjà produits! De plus en plus la science moderne comprend qu'il faut observer, expérimenter, mesurer, et que c'est à ce prix que s'obtiennent les grandes découvertes. C'est pourquoi les instruments deviennent tous les jours plus précis et les mesures plus exactes. Si ce mouvement continue, il n'est pas vraisemblable que la civilisation grandissante se contente toujours de la numération décimale, si défectueuse. Dans un ou deux siècles on ne comptera plus par dix. On comptera probablement par seize.

G. de Sarrauton

Oran le 15 novembre 1891.